

Zusätzliche Übungsaufgaben

Es sei darauf hingewiesen, dass die folgenden Übungsaufgaben nicht den Anspruch haben, den kompletten Vorlesungsstoff abzudecken.

Aufgabe 1 (Nullstellen linearer Systeme)

Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}}_{c^T} x$$

mit der Anfangsbedingung $x_0 = x(0) \neq 0$ und mit dem Eingangssignal

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \exp(pt) & t \geq 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $p \in \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}^2$ so, dass der Ausgang identisch Null ist, d.h. $y(t) \equiv 0$ für $t \geq 0$.

Hinweis: Rechnen Sie im Frequenzbereich.

Lösung

Laplace-Transformation der Zustandsraumdarstellung für $x_0 \neq 0$ ergibt

$$y(s) = c^T (sI - A)^{-1} x_0 + G(s)u(s)$$

Die Übertragungsfunktion $G(s)$ kann direkt abgelesen werden, da die Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormalform gegeben ist. Somit ergibt sich

$$y(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\frac{1}{s^2 + 8s + 15} \begin{bmatrix} s + 8 & 1 \\ -15 & s \end{bmatrix}}_{(sI - A)^{-1}} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} + \frac{s + 2}{s^2 + 8s + 15} \frac{1}{s - p}.$$

Nun wählt man $p = -2$ (p ist Nullstelle der Übertragungsfunktion), damit links und rechts vom plus-Zeichen der gleiche Nenner steht. Daraus ergibt sich nun folgende Bedingung für den Anfangswert x_0

$$y(s) = \frac{x_{01}(2s + 1) + x_{02}(s + 2)}{s^2 + 8s + 15} + \frac{1}{s^2 + 8s + 15} \stackrel{!}{=} 0$$

bzw.

$$x_{01}(2s + 1) + x_{02}(s + 2) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{01} = \frac{1}{3}, x_{02} = -\frac{2}{3}.$$

★**Nulldynamik:** Die Problemstellung in dieser Aufgabenstellung ist ein Spezialfall des sogenannten "Output-Zeroing" Problems (siehe Abbildung 1), welches lautet: Wie muß die Steuerungsfunktion $u(t)$ und der Anfangswert x_0 eines (nichtlinearen) Systems gewählt werden, damit der Ausgang $y(t)$ (und somit auch alle zeitlichen Ableitung $\dot{y}(t) \equiv \ddot{y}(t) \equiv \dots \equiv 0$) für alle Zeiten identisch verschwindet.

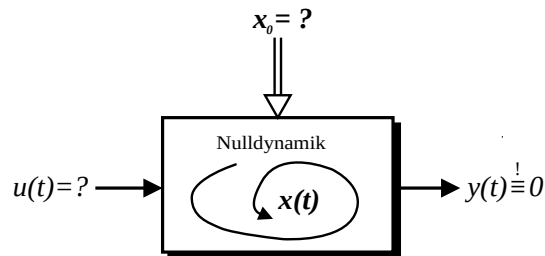


Abbildung 1: Output Zeroing Problem.

Die eventuell verbleibende "interne Dynamik" des Systems, in unserem Beispiel ist das

$$x(t) = \Phi(t)[1/3 \quad -2/3]^T + \int_0^t \Phi(t-\tau)be^{-2\tau}d\tau,$$

bezeichnet man aufgrund der Eigenschaft, dass der Ausgang identisch Null bleibt, als Nulldynamik. Allgemein versteht man unter der Nulldynamik eines Systems jene Dynamik die im Inneren des Systems möglich ist - unter der Nebenbedingung, dass der Ausgang y identisch verschwinden soll. Die Eigenwerte der Nulldynamik von linearen Systemen entsprechen genau den Nullstellen der Übertragungsfunktion (Details werden in der Vorlesung besprochen).

Aufgabe 2 (Nullstellen linearer Systeme)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$, wobei $Z(s)$ das Zählerpolynom und $N(s)$ das Nennerpolynom bezeichne bezeichnet. $Z(s)$ und $N(s)$ seien teilerfremd, d.h. sie besitzen keine gemeinsamen Nullstellen. Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt

$$Z(s) = \det \begin{bmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{bmatrix}.$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht die Berechnung der Nullstellen der Übertragungsfunktion $G(s)$ aus der Zustandsraumdarstellung (A, b, c^T, d) , indem man einfach die Determinante der Matrix (der sogenannten *Rosenbrock-Systemmatrix*) gleich Null setzt.

Hinweis: Benutzen Sie zur Lösung der Aufgabe folgende Formel (Schur-Zerlegung):

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

Lösung

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} sI - A & b \\ -c^T & d \end{bmatrix} &\stackrel{Schur}{=} \det \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ -c^T(sI - A)^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A & b \\ 0 & d + c^T(sI - A)^{-1}b \end{bmatrix} \right) \\ &= \underbrace{\det(sI - A)}_{=N(s)} \cdot \underbrace{\det(d + c^T(sI - A)^{-1}b)}_{=G(s)} = Z(s) \end{aligned}$$

Bemerkung: Aus der Beziehung kann man auch zeigen, dass die Nullstellen der Übertragungsfunktion invariant bezüglich Zustands-/Ausgangsrückführung sind (wird in der Vorlesung *Robust Control* ausführlich behandelt).

Aufgabe 3 (Nullstellen linearer Systeme)

Gegeben sei das lineare SISO System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung $x(0) = [-0.577, 0.577]^T$ und Eingangstrajektorie $u(t) = -0.577e^{-t}$, $t \geq 0$. Der Ausgang $y(t) \equiv 0$ für $t \geq 0$. Ist die Lösung für den gegebenen Eingang $u(t)$ und die Anfangsbedingung $x(0)$ (beide ungleich Null) eindeutig? Geben Sie eine Begründung an.

Lösung

Die Lösung ist nicht eindeutig. Es gilt

$$y(t) = c^T e^{At} x(0) + \int_0^t c^T e^{-A\tau} b u(\tau) d\tau \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit folgt $ky(t) = 0$ mit $k \in \mathbb{R}$. Somit gilt, dass man auch $\tilde{x}(0) = kx(0)$ und $\tilde{u}(t) = ku(t)$ wählen kann.

Aufgabe 4 (Struktureigenschaften linearer Systeme)

Gegeben sei ein SISO-System der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= c^T x + du \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $b, c \in \mathbb{R}^3$ und $d \in \mathbb{R}$. Folgendes sei über das System bekannt:

- i) A ist eine singuläre Matrix.
- ii) Ein Eigenwert von A liegt bei $-1 + i$.
- iii) Der Ausgang des Systems ist identisch Null, $y(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, falls der Eingang identisch Null ist, $u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, und der Anfangswert $x_0 (\neq 0)$ so gewählt wurde, dass gilt: $Ax_0 = \lambda x_0$.

iv) Die Sprungantwort des Systems sieht (qualitativ) folgendermaßen aus:

Beantworten Sie folgende Fragen:

- a) Was kann man bezüglich Stabilitätsverhalten aussagen?
(instabil, (asymptotisch) stabil, keine Aussage möglich)
- b) Was kann man bezüglich Beobachtbarkeit aussagen?
(beobachtbar, nicht beobachtbar, keine Aussage möglich)
- c) Was kann man bezüglich Steuerbarkeit aussagen?
(steuerbar, nicht steuerbar, keine Aussage möglich)
- d) Was kann man bezüglich des relativen Grades r aussagen?
($r=0/1/2/3$, keine Aussage möglich)
- e) Geben Sie eine mögliche Realisierung (A, b, c, d) des Systems an.
- f) Verändern Sie Ihren im Punkt (e) bestimmten Vektor c so, dass das System nichtminimalphasig wird. Welchen relativen Grad hat das neue System.

Geben sie jeweils eine Begründung an.

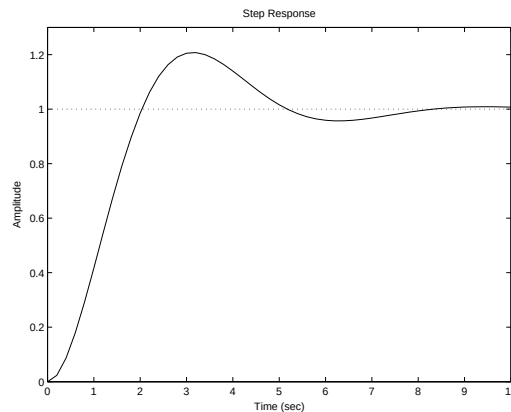


Abbildung 2: Sprungantwort.

Lösung

- a) Siehe i), ii). Die Matrix A ist singulär, d.h. also es existiert (mind.) ein Eigenwert bei Null. Weiters ist die Matrix A reell, deshalb existiert auch der zu $-1 + i$ konjugiert komplexe Eigenwert $-1 - i$. Somit haben wir alle Eigenwerte bestimmt und das System ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.
- b) Siehe iii). Das System ist nicht beobachtbar, da sowohl x_0 auch als $-x_0$ ($Ax_0 = \lambda x_0$) den Ausgang $y(t) \equiv 0$ verursachen und somit der Anfangswert x_0 nicht eindeutig aus dem Ausgangssignal bestimmt werden kann.
- c) Hier ist keine Aussage möglich. Das System kann sowohl steuerbar als auch nicht steuerbar sein (siehe (e)).

- d) Betrachte iv). Der relative Grad (Nennergrad-Zählergrad der Übertragungsfunktion) ist größer als 1, da das System mindesten PT2-Verhalten (siehe Sprungantwort, $\dot{h}(0) = 0$) zeigt. Relativer Grad 3 ist nicht möglich, da aufgrund der Nichtbeobachtbarkeit Kürzungen in der Übertragungsfunktion auftreten. Damit ist der relative Grad 2.

e)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_1^T = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$b_2^T = [0 \quad 1 \quad 1]$$

$$c^T = [-2 \quad 0 \quad 0]$$

$$d = 0,$$

wobei $b = b_2$ ($b = b_1$) zu einer (nicht) steuerbaren Realisierung führt. Die -2 in c ist notwendig, damit die stationäre Verstärkung 1 beträgt (siehe Sprungantwort). (**Hinweis:** $G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b$ und $\text{diag}(A, B)^{-1} = \text{diag}(A^{-1}, B^{-1})$).

- f) c muß so gewählt werden, dass gilt:

$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b \stackrel{!}{=} \frac{(s-a) \dots}{\dots}, \quad a > 0$$

$$\Rightarrow c^T = [-2 \quad -1 \quad 0]$$

Der relative Grad des neuen Systems ist 1.

Aufgabe 5 (Relativer Grad)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1^3 - x_1 + u.$$

- Bestimmen Sie den relativen Grad r für $y = x_1$.
- Bestimmen Sie den relativen Grad r für $y = x_2$.
- Bestimmen Sie den relativen Grad r für $y = \cos(x_2)$.

Lösung

- $\ddot{y} = -x_2 - x_1^3 - x_1 + u \Rightarrow r = 2$.
- $\dot{y} = -x_2 - x_1^3 - x_1 + u \Rightarrow r = 1$.
- $\dot{y} = -\sin(x_2)[-x_2 - x_1^3 - x_1] - \sin(x_2)u \Rightarrow r = 1$ falls $x_2 \neq n\pi$ und r ist nicht definiert falls $x_2 = n\pi$.

$\Rightarrow$ der relative Grad eines Systems ist abhängig vom Systemausgang y und muß nicht überall im Zustandsraum definiert sein (lokale Eigenschaft).

Aufgabe 6 (Relativer Grad)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - x_1^3 - x_1 + u,\end{aligned}$$

das am Arbeitspunkt $x_A = 0$ betrachtet werden soll.

- Bestimmen Sie den relativen Grad r für $y = x_1$.
- Bestimmen Sie den relativen Grad r für $y = x_2$.
- Bestimmen Sie den relativen Grad r für $y = \cos(x_2)$.

Lösung

- $\ddot{y} = -x_2 - x_1^3 - x_1 + u \Rightarrow r = 2$.
- $\dot{y} = -x_2 - x_1^3 - x_1 + u \Rightarrow r = 1$. Der Ausgang $y = x_2$ liegt also „näher“ am Eingang als der Ausgang $y = x_1$.
- $\dot{y} = -\sin(x_2)[-x_2 - x_1^3 - x_1] - \sin(x_2)u \Rightarrow$ das System besitzt einen nicht wohldefinierten relativen Grad $r = 1$.

Aufgabe 7 (Nullodynamik)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + ax_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - u \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ ein konstanter Parameter ist.

- Bestimmen Sie die Nullodynamik des Systems und geben Sie Werte für a so an, dass die Nullodynamik (asymptotisch) stabil, instabil wird.
- Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems. Für welche Werte von a ist das System minimalphasig und asymptotisch stabil.

Lösung

- a) Zur Bestimmung der Nulldynamik muß der Ausgang y identisch zu Null gesetzt werden ($y(t) \stackrel{!}{=} 0$).

$$y(t) \equiv 0 \Rightarrow x_1(t) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_1(t) \equiv 0 \Rightarrow ax_2(t) + u(t) \equiv 0.$$

D.h. man wählt $x_1(0) = 0$ und $u = -ax_2$ um $y(t) \equiv 0$ zu erhalten. Die Nulldynamik ist gegeben durch

$$\dot{x}_2 = -u = ax_2$$

und ist instabil für $a > 0$, stabil für $a = 0$ und asym. stabil (minimalphasig) für $a < 0$.

- b)

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{s - a}{s^2 + 2s + a}$$

Aus der Vorzeichenbedingung folgt (asym.) Stabilität für $a = 0$ ($a > 0$) und Instabilität für $a < 0$, d.h. es existiert kein Wert a so, dass das System minimalphasig und asymptotisch stabil ist. (Beachte: Die Pole der Nulldynamik entsprechen den Nullstellen der Übertragungsfunktion.)

Aufgabe 8 (Nulldynamik)

Gegeben sei das System (Kugel-Balken System)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{5}{7}(x_1 x_4^2 - g \sin(x_3)) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1 - R.$$

Bestimmen Sie die Nulldynamik des Systems sowie den Eingang $u(t)$ und den Anfangswert x_0 so, dass $y(t) \equiv 0$ für alle Zeiten $t \geq 0$ (Output-Zeroing Problem).

Lösung

Für die Nulldynamik muß der Ausgang $y(t)$ und dessen höheren Ableitungen identisch verschwinden: $y(t) \equiv \dot{y}(t) \equiv \ddot{y}(t) \equiv \dots \equiv 0$.

$$y(t) = x_1 - R \equiv 0 \Rightarrow x_1 = R$$

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) \equiv 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{5}{7}(x_1(t)x_4^2(t) - g \sin(x_3(t))) \equiv 0 \Rightarrow x_4^2 = \frac{g}{R} \sin(x_3)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\dot{y}}(t) &= \frac{5}{7}(x_2(t)x_4^2 + 2x_1(t)x_4(t)\dot{x}_4(t) - gx_4(t)\cos(x_3(t))) \\ &= \frac{5}{7}(x_4^2(t) + 2Rx_4(t)\dot{x}_4(t) - gx_4(t)\cos(x_3(t))) \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_4 = \frac{g}{2R}\cos(x_3). \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende 2 mögliche Verhalten für die Nulldynamik:

- Aus $\ddot{y} = 0$ folgt

$$(x_3, x_4) = (n\pi, 0)$$

- bzw. aus $\ddot{\ddot{y}} = 0$ folgt

$$\dot{x}_4 = \frac{g}{2R} \cos(x_3).$$

Aufgabe 9 (B/I-Normalform, Nulldynamik)

Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s - 5}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}.$$

- Bestimmen Sie die dazugehörige Regelungsnormform des Systems.
- Bestimmen Sie den relativen Grad des Systems.
- Transformieren Sie das System in die B/I-Normalform. Verwenden Sie als Zustandsvariablen der Nulldynamik $\eta_1 = x_1, \eta_2 = x_2$.
- Als nächstes wird ein Zustandsregler

$$u(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = 15\xi_1 + 4\xi_2 + 104\eta_1 + 16\eta_2$$

vorgeschlagen, der den Ausgang $y(t)$ stabilisieren soll, d.h. $y(t) \xrightarrow{!} 0$ für $t \rightarrow \infty$. Wird dieses Ziel mit dem vorgeschlagenen Zustandsregler erreicht?

- Warum ist der in Punkt (d) vorgeschlagene Zustandsregler (k)eine gute Wahl?

Lösung

- Für die Regelungsnormform ergibt sich

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} x.$$

- Relativer Grad (*Nennergrad* – *Zählergrad*) ist 2.

- B/I-Normalform:

$$\xi_1 = c^T x = -5x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\xi_2 = c^T Ax = -5x_2 + 4x_3 + x_4$$

$$\eta_1 = x_1$$

$$\eta_2 = x_2$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2$$

$$\dot{\xi}_2 = -24x_1 - 50x_2 - 40x_3 - 6x_4 + u$$

$$x_4 \text{ kommt nur in } \xi_2 \text{ vor} \Rightarrow$$

$$-6\xi_2 = 30\eta_2 - 24x_3 - 6x_4$$

$$-16\xi_1 = 80\eta_1 - 64\eta_2 - 16x_3$$

$$\dot{\xi}_2 = -16\xi_1 - 6\xi_2 - 104\eta_1 - 16\eta_2 + u$$

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2$$

$$\dot{\eta}_2 = x_3$$

$$y = \xi_1 = -5x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\dot{\eta}_2 = \xi_1 + 5\eta_1 - 4\eta_2.$$

Somit ergibt sich für die B/I-Normalform

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -16 & -6 & -104 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \xi_1.$$

- Der Zustandsregler entkoppelt die Nulldynamik (η_1, η_2 sind nicht beobachtbar!) des System und liefert folgende Regelkreisdynamik

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \xi_1.$$

Das Teilsystem mit den Zuständen ξ_1, ξ_2 wird nicht von den Zuständen η_1, η_2 beeinflusst. Die Dynamikmatrix des Teilsystem ξ_1, ξ_2 ist asymptotisch stabil. Deshalb gilt $y(t) = \xi_1 \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

- Der Zustandsregler ist keine gute Wahl da nur der Ausgang stabilisiert wird aber die verbleibende Dynamik (Nulldynamik)

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

instabil ist. Man beachte, dass die Nulldynamik direkt vom Zählerpolynom der Übertragungsfunktion $G(s)$ abgelesen werden kann!

Aufgabe 10 (B/I-Normalform, Nulldynamik)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1^3 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} u$$

$$y = \underbrace{x_3}_{\mathbf{h}(\mathbf{x})}.$$

- Bestimmen Sie den relativen Grad r des Systems.
- Transformieren Sie das System in die B/I-Normalform, wobei $\eta_1 = x_2^2 - 2x_1$ die Zustandsvariable der Nulldynamik sein soll.
- Bestimmen Sie den Gültigkeitsbereich $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der aus Punkt (b) erhaltenen nichtlinearen Koordinatentransformation $[\xi_1 \ \xi_2 \ \eta_1]^T = \Phi(x)$.
- Bestimmen das Stabilitätsverhalten der Nulldynamik mit Hilfe der B/I-Normalform.
- Bestimmen das Stabilitätsverhalten der Nulldynamik ohne Zuhilfenahme der B/I-Normalform.

Lösung

- $y = x_3, \dot{y} = x_2, \ddot{y} = x_1 x_2 + u \Rightarrow r = 2.$
- B/I-Normalform:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_3 \\ \xi_2 &= x_2 \\ \eta_1 &= x_2^2 - 2x_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \frac{1}{2}\xi_2(\xi_2^2 - \eta_1) + u \\ \dot{\eta}_1 &= \xi_2^2(\xi_2^2 - \eta_1) + \frac{1}{4}(\xi_2^2 - \eta_1)^3\end{aligned}$$

•

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_2^2 - 2x_1 \end{bmatrix} = \Phi(x)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix} = \text{regulär, für alle } x \in \mathbb{R}^3.$$

Die Transformation $\Phi(x)$ ist eineindeutig (bijektiv) und stetig differenzierbar, ebenso wie ihre Inverse, für alle $x \in \mathbb{R}^3$ (globaler Diffeomorphismus).

- $\xi_1 = \xi_2 = 0 \Rightarrow \dot{\eta}_1 = -\frac{1}{4}\eta_1^3 \Rightarrow$ asymptotisch stabil.
- Zur Bestimmung der Nulldynamik muß gelten: $y(t) = \dot{y}(t) \dots \equiv 0$.

$$y = x_3 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{y} = x_2 \stackrel{!}{=} 0$$

Die verbleibende Dynamik $\dot{x}_1 = -x_1^3$ ist asymptotisch stabil.

Aufgabe 11 (B/I-Normalform, Nulldynamik)

Gegeben ist die BINF eines nichtlinearen Systems

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 x_3 + u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + \frac{x_1 + x_2 x_3}{1 + x_3} - x_1 x_2^2$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + x_1 x_2 (1 + x_3)$$

$$y = x_1$$

- Welche Zustände gehören zur Integratorkette, welche zur internen Dynamik?
- Wie lautet die Nulldynamik des Systems?
- Ist die Nulldynamik lokal stabil?
- Ist die Nulldynamik global stabil?

Lösung

- Das System hat offensichtlich relativen Grad $r = 1$, zur Integratorkette gehört nur $\xi = x_1$, die Variablen der internen Dynamik sind $\eta_1 = x_2$ und $\eta_2 = x_3$.
- Die Nulldynamik lautet entsprechend

$$\dot{\eta}_1 = -\frac{\eta_1}{1 + \eta_2}$$

$$\dot{\eta}_2 = -\eta_2.$$

- Das lokale Verhalten der Nulldynamik lässt sich über die Jacobi-Linearisierung bestimmen. Die Jacobi-Matrix am Punkt $(\eta_1 \ \eta_2) = (0 \ 0)$ lautet

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+\eta_2} & \frac{\eta_1}{(1+\eta_2)^2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{(0/0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit ist die Nulldynamik lokal stabil. Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn man die Nulldynamik des linearisierten Systems

$$\dot{x}_1 = u$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

$$\dot{x}_3 = -x_3$$

$$y = x_1$$

betrachtet.

- d) Die spezielle Struktur der Nulldynamik ermöglicht in diesem Fall eine genaue Analyse. Die Lösung der zweiten Gleichung lässt sich exakt bestimmen zu

$$\eta_2 = e^{-t}\eta_2(0).$$

Einsetzen in die Gleichung für η_1 ergibt

$$\dot{\eta}_1 = -\frac{\eta_1}{1 + e^{-t}\eta_2(0)}.$$

Die Lösung dieser Gleichung lässt sich durch Trennung der Veränderlichen bestimmen und lautet

$$\eta_1(t) = \frac{\eta_1(0)(1 + \eta_2(0))}{e^t + \eta_2(0)}.$$

Die Lösung divergiert in endlicher Zeit, falls die Anfangsbedingung die Beziehung $\eta_2(0) < -1$ erfüllt. Damit ist gezeigt, dass die Nulldynamik *nicht* global stabil ist.

Aufgabe 12 (Eigenschaften von nichtlinearen SISO Systemen)

Gegeben sei ein nichtlineares SISO System n -ter Ordnung mit relativem Grad r ($r < n$). Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

- a) Die Byrnes-Isidori Normalform des Systems ist eindeutig.
- b) Die Byrnes-Isidori Normalform des Systems ist nicht eindeutig.
- c) Die Beschreibung der Nulldynamik ist eindeutig, da die Nulldynamik eine Systemeigenschaft ist.
- d) Die Beschreibung der Nulldynamik ist nicht eindeutig, da die Koordinaten der Nulldynamik mittels eines Diffeomorphismus beliebig transformiert werden können.
- e) Die Nulldynamik des System kann mittels einer Zustandrückführung verändert werden.

Lösung

Die Aussagen b) und d) sind korrekt.

Aufgabe 13 (Output-Zeroing Problem)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x. \end{aligned}$$

- a) Bestimmen Sie den Anfangswert $x_0 = x(t=0) \neq 0$ und einen Zustandsregler $u(x)$ so, dass der Ausgang identisch verschwindet, d.h. $y(t) \equiv 0$.

- b) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulldynamik des geschlossenen Kreises mit dem aus Punkt (a) bestimmten Zustandsregler $u = u(x)$.

Lösung

- a) Es muß gelten: $y(t) \equiv 0$, $\dot{y}(t) \equiv 0, \dots$. Dazu leitet man den Ausgang y so oft ab, bis die entsprechende Ableitung $y^{(r)}$ explizit von u abhängig ist (der relativer Grad ist dann r). Dann wählt man u so, dass $y^{(r)} \equiv 0$ ist. Schlußendlich müssen noch der Anfangswert x_0 so gewählt werden, dass er auf der Mannigfaltigkeit der Nulldynamik liegt.

$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\dot{y} = -x_1 - 2x_3 + 2u \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}x_1 + x_3$$

Der Anfangswert x_0 muß hier so gewählt werden, das gilt: $y(t=0) = x_{10} + x_{20} + x_{30} \stackrel{!}{=} 0$, also z.B. $x_0^T = (-1, 1, 0)$.

- b) Um die Nulldynamik festzustellen betrachten wir wieder die Dynamik des System wenn $y(t) \equiv 0$. Daraus folgt (siehe (a)):

$$x_3 = -x_1 - x_2$$

$$u = \frac{1}{2}x_1 + x_3$$

Durch Einsetzen obiger Beziehung in $\dot{x}_1$ und $\dot{x}_2$ erhält eine asymptotische stabile Nulldynamik:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1 - 2x_2.$$

Hinweis: Anstelle von $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ kann man z.B. auch $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ bestimmen, wobei dann x_1 eliminiert werden muß. Es müssen jedoch genau 2 ($n - r$) Gleichungen sein, da der relative Grad r gleich 1 ist. Ferner sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Nulldynamik des geschlossenen Kreises gleich der Nulldynamik des offenen Kreises ist.

Aufgabe 14 (Stabilität)

Gegeben sei folgendes nichtlineare System

$$\dot{x} = ax + f(x),$$

mit $x(t) \in \mathbb{R}$ (skalares System). Bestimmen Sie aus Abbildung 3 alle Ruhelagen sowie deren Stabilitätsverhalten (asymptotisch stabil, stabil, instabil). des Systems für

- a) $a = 0$ und
 b) $a = 1$ im Intervall $[a, b]$

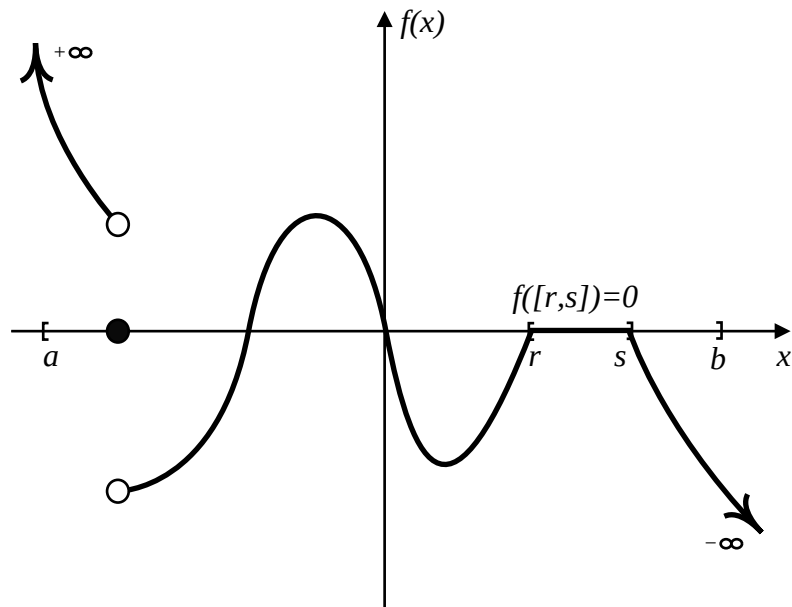


Abbildung 3: Funktion $f(x)$.

Lösung

- a) Siehe Abbildung 4. (Es sei darauf hingewiesen, dass die Lösung der Differentialgleichung an der Unstetigkeitsstelle nicht wohldefiniert ist.)

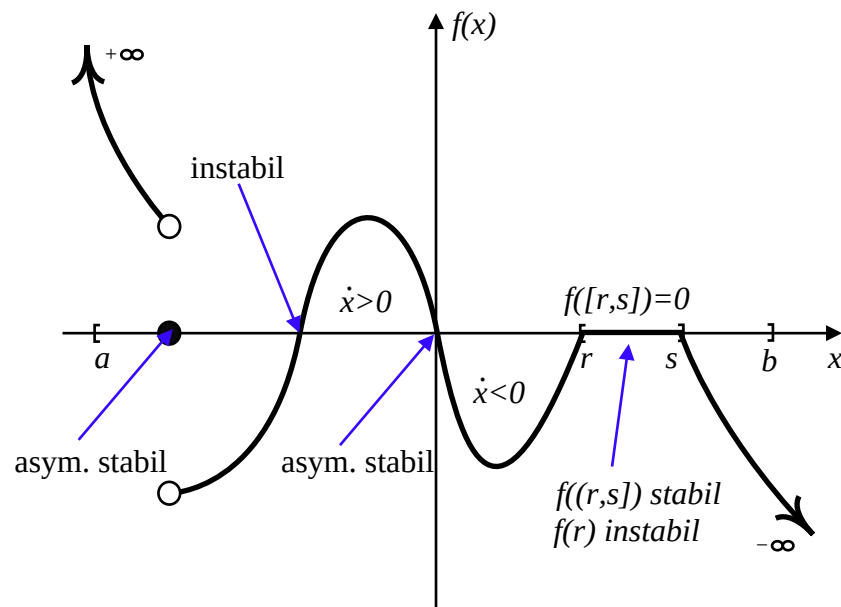


Abbildung 4: Lösung zu (a).

- b) Siehe Abbildung 5.

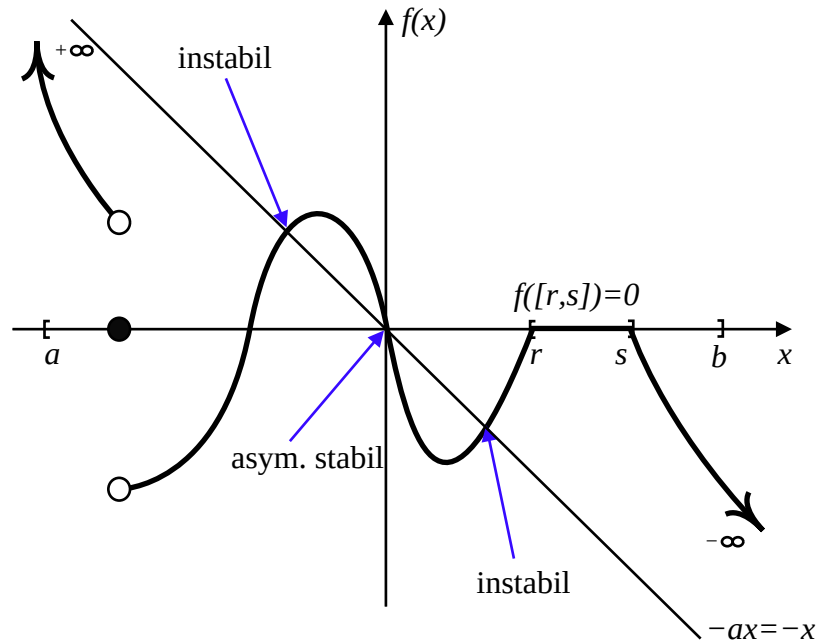


Abbildung 5: Lösung zu (b).

Aufgabe 15 (Ljapunov-Gleichung)

Gegeben sei das lineare System

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

mit $x \in \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}$ und die Zustandsrückführung

$$u(x) = k^T x = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} x.$$

Zeigen Sie mittels der Ljapunov-Gleichung

$$A^T P + P A = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dass der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

Lösung

Der geschlossene Regelkreis

$$\dot{x} = (A + bk^T)x = \tilde{A}x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x$$

ist genau dann asymptotisch stabil, wenn die Ljapunov-Gleichung

$$\tilde{A}^T P + P \tilde{A} = -Q, \quad \text{mit } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

eine positiv definite Lösung P hat. Setzt man $\tilde{A}$ in die Ljapunov-Gleichung ein, dann erhält man folgendes Gleichungssystem: $2p_{12} = 1$, $p_{11} - 2p_{12} - p_{22} = 0$, $4p_{22} - 2p_{12} = 1$. Die Lösung des Gleichungssystems ist: $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow$ Der geschlossene Regelkreis ist asym. stabil.

Aufgabe 16 (Ljapunov-Gleichung)

Zeigen Sie, dass das nichtlineare System

$$\dot{x} = Ax + g(x),$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ asymptotisch stabil ist, wenn

- das lineare System $\dot{x} = Ax$ asymptotisch stabil ist.
- (ii) die Funktion $g(x)$ folgende globale Dehnungsschranke (Lipschitz-Bedingung) erfüllt: $|g(x)| \leq \gamma|x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, mit $\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$, wobei $\lambda_{\min}(Q)$ und $\lambda_{\max}(P)$ der kleinste bzw. der größte Eigenwerte von den Matrizen P und Q der Ljapunov-Gleichung $A^T P + P A = -Q$ ist.

Lösung

Da das lineare System $\dot{x} = Ax$ asym. stabil ist, hat die Ljapunov-Gleichung $A^T P + P A = -Q$ eine eindeutige positiv definite symmetrische Lösung $P = P^T \geq 0$. Somit gilt für die Ljapunov-Funktion $V(x) = x^T P x$

$$\lambda_{\min}(P) \|x\|_2^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P) \|x\|_2^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} Ax = -x^T Q x \leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2,$$

wobei $\lambda_{\min}(P)$ und $\lambda_{\max}(P)$ der kleinste bzw. der größte Eigenwerte von P und $\lambda_{\min}(Q)$ der kleinste Eigenwert von Q ist. Somit ist V positiv definite und eine Ljapunov-Funktion für das lineare System $\dot{x} = Ax$. Es gilt damit:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Px + x^T P = 2x^T P$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| = \|2x^T P\|_2 = 2\lambda_{\max}(P) \|x\|_2.$$

Um Stabilität von $\dot{x} = Ax + g(x)$ unter den Annahmen (i) und (ii) zu beweisen, benutzt man V als Ljapunov-Funktion. Die Ableitung von V ist:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x} Ax + \frac{\partial V}{\partial x} g(x) \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2 + (2\lambda_{\max}(P) \|x\|_2)(\gamma \|x\|_2) \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2 + 2\gamma \lambda_{\max}(P) \|x\|_2^2 \\ &\leq \underbrace{(-\lambda_{\min}(Q) + 2\gamma \lambda_{\max}(P))}_{< 0 \text{ wegen (ii)}} \|x\|_2^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Das System $\dot{x} = Ax + g(x)$ ist asymptotisch stabil.

Aufgabe 17 (Linearisierungsmethode von Ljapunov)

Die LORENZ-Gleichungen sind wohl die bekanntesten Differentialgleichungen mit chaotischem Verhalten und lauten:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= bx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - cz,\end{aligned}$$

mit $a > 0$, $0 \leq b < 1$ und $c > 0$.

- Bestimmen Sie alle Ruhelagen der LORENZ-Gleichungen.
- Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Ruhelagen mit Hilfe der Linearisierungsmethode von Ljapunov.
- Was passiert für $b = 1$?

Bemerkung: Im Jahre 1963 leitete der Meteorologe Lorenz dieses vereinfachte Modell zur Beschreibung von Turbulenzen in der Erdatmosphäre ab. Lorenz entdeckte dabei die empfindliche Abhängigkeit der Trajektorien von dem Anfangszustand, nachdem er eine Computersimulation mit demselben Anfangszustand, aber mit weniger Stellen nach dem Komma wiederholte. Dabei stellte er zu seiner Überraschung fest, dass beide Simulationen nach einiger Zeit keine Ähnlichkeit mehr miteinander hatten. Diese hohe Sensitivität des Wetters macht die Wettervorhersage besonders schwierig („Schmetterlingseffekt“).

Lösung

- Für $b \leq 1$ ist $x_R = y_R = z_R = 0$ die einzige Ruhelage.
- Für das linearisierte System um die Ruhelage erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte lauten somit : $\lambda_1 = -c$, $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left(-a - 1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4ab} \right)$. Für $b < 1$ sind die Eigenwerte reell und negativ. Also ist die Ruhelage für $b < 1$ asymptotisch stabil.

- Für $b = 1$ ist ein Eigenwerte gleich Null. Somit ist keine Aussage über das Stabilitätsverhalten möglich.

Aufgabe 18 (Direkte Methode von Ljapunov)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u.\end{aligned}$$

Wählen Sie einen Zustandsregler $u(x) = k(x)$ so, dass das System im Ursprung $x_R = 0$ des geregelten Systems global asymptotisch stabil wird. Verwenden Sie dazu die Ljapunov-Funktion

$$V(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

Lösung

$$V(x) \rightarrow \infty, \text{ falls } \|x\| \rightarrow \infty$$

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_1^2 + 4x_1x_2 + (2x_2 + x_1)u \stackrel{!}{<} 0.$$

Wählt man z.B. für $u(x) = -(2x_1 + x_2)$, dann erhält man

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0.$$

Bemerkung: Falls es möglich ist ein $u(x)$ zu finden so, dass $\dot{V}(x)$ überall im Zustandsraum negativ-definit ist, dann nennt man $V(x)$ auch Kontroll-Ljapunov-Funktion.

Aufgabe 19 (Direkte Methode von Ljapunov)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = (x_1 + x_2) \sin(x_1) - 3x_2.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ljapunov-Funktion

$$V(x) = \frac{1}{2}(ax_1^2 + x_2^2),$$

wobei a noch ein zu bestimmender Parameter ist, dass der Ursprung $x_R = 0$ des Systems global asymptotisch stabil ist. (**Hinweis:** Folgende Beziehung könnte von Nutzen sein: $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$.)

Lösung

$$V(x) \rightarrow \infty, \text{ falls } \|x\| \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= ax_1(-x_1 + x_2) + x_2 \left((x_1 + x_2) \underbrace{\sin(x_1)}_{\leq 1} - 3x_2 \right) \\ &\leq -ax_1^2 + \underbrace{x_1x_2(a+1)}_{\leq \frac{a+1}{2}(x_1^2+x_2^2)} - 2x_2^2 \\ &\leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \text{ für } a = 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 20 (Direkte Methode von Ljapunov)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + x_1.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Ljapunov-Funktion

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2),$$

dass der Ursprung $x_R = 0$ des Systems asymptotisch stabil ist.

Lösung

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 + \underbrace{x_1 x_2 (x_1^2 + 1)}_{< 2x_1 x_2 \text{ für } x_1 < 1} < 0, \text{ da } 2x_1 x_2 \leq x_1^2 + x_2^2.$$

Aufgabe 21 (Direkte Methode von Ljapunov)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \omega_0 x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= -\omega_0 x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1).\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der quadratischen Ljapunov-Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, dass der Ursprung $x_R = 0$ des Systems asymptotisch stabil ist und bestimmen Sie den Einzugsbereich der Ruhelage.

Lösung

Mit Hilfe der Ljapunov-Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ erhält man $\dot{V}(x) = x_1^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) + x_2^2(x_1^2 + x_2^2 - 1) < 0$ für $x_1^2 + x_2^2 < 1$. Daraus folgt, dass das System lokal asymptotisch stabil ist. Da für *alle* Anfangswerte mit $x_{10}^2 + x_{20}^2 \geq 1$ gilt: $\dot{V}(x(t)) \geq 0$ für *alle* Zeiten $t \geq 0$, ergibt sich für den Einzugsbereich: $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$.

Aufgabe 22 (Direkte Methode von Ljapunov)

Gegeben seien Systeme der Form

$$\dot{x} = f_i(x),$$

mit $x = (x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $f_i(0) = 0$, $i = 1 \dots 4$. Für diese Systeme sind unten Kandidaten für Ljapunow Funktionen $V_i(x)$ vorgeschlagen worden und jeweils $\dot{V}_i(x) = L_f V_i(x)$, d.h. die Ableitung entlang der Trajektorien, berechnet worden. Welche Aussage bezüglich Stabilitätsverhalten der Ruhelage $x = 0$ kann in den unten dargestellten Fällen jeweils getroffen werden. Geben Sie jeweils *nur die bestmögliche (schärfste) Aussage* an und begründen Sie Ihre Antwort.

- a) $V_1(x) = x_1^2 + x_2^2$, $\dot{V}_1(x) = -x_1^2$
- (i) stabil
 - (ii) asymptotisch stabil
 - (iii) global asymptotisch stabil
 - (iv) instabil

- (v) keine Aussage möglich
- b) $V_2(x) = x_1^2 - x_2^2$, $\dot{V}_2(x) = x_1^2 + x_2^2$
- (i) stabil
- (ii) asymptotisch stabil
- (iii) global asymptotisch stabil
- (iv) instabil
- (v) keine Aussage möglich
- c) $V_3(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{1+x_2^2}$, $\dot{V}_3(x) = -x_1^2 - x_2^2$
- (i) stabil
- (ii) asymptotisch stabil
- (iii) global asymptotisch stabil
- (iv) instabil
- (v) keine Aussage möglich

Lösung

- a) stabil
- b) instabil
- c) asymptotisch stabil

Aufgabe 23 (Direkte Methode von Ljapunov, LaSalle)

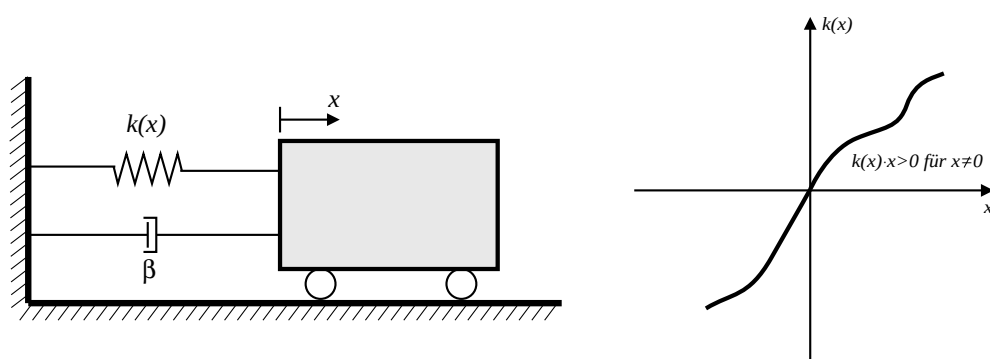


Abbildung 6: Nichtlineares Feder-Masse System.

Gegeben sei das nichtlineare Feder-Masse System (siehe Abbildung 6)

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + k(x) = 0$$

mit $k(x)x > 0$ für $x \neq 0$ und $\beta > 0$.

- Bestimmen Sie das Zustandsraummodell des Systems mit den Zustandsvariablen $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$.
- Zeigen Sie mit Hilfe der integral-quadratischen Ljapunov-Funktion¹

$$V(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \int_0^{x_1} k(\xi)d\xi,$$

dass der Ursprung $x_R = 0$ des Systems stabil ist.

- Geben sie jeweils eine physikalische Interpretation für den quadratischen und integralen Anteil der Ljapunov-Funktion an.
- Zeigen Sie mit Hilfe des LaSalleschen Invarianzprinzipes, dass das System asymptotisch stabil ist.

Lösung

•

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\beta x_2 - k(x_1).\end{aligned}$$

•

$$\dot{V}(x) = -\beta x_2^2 \leq 0.$$

•

$$V(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x_2^2}_{E_{kin}} + \underbrace{\int_0^{x_1} k(\xi)d\xi}_{E_{pot}}.$$

- Die Menge $\Omega = \{x : x_2 = 0\}$ ist die Menge für die $\dot{V}(x)$ gleich Null ist. Die größte invariante Menge in Ω ist der Punkt $x = 0$ ($x(t) = x_R(t) = 0$ ist die einzige Trajektorie die in Ω verläuft). Daraus folgt mit Hilfe des LaSalleschen Invarianzprinzipes, dass der Ursprung global asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 24 (Direkte Methode von Ljapunov, Einzugsbereich)

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2x_1^2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}\tag{24.a}$$

- a) Bestimmen Sie das (lokale) Stabilitätsverhalten der Ruhelage $x_R = 0$ mit Hilfe der Ljapunov-Funktion

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

¹Ljapunov-Funktion vom Typ Lure.

- b) Bringen Sie die zeitliche Ableitung der Ljapunov-Funktion entlang der Trajektorien des Systems (24.a) in die Form

$$\dot{V}(x) = -x^T \underbrace{\begin{bmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{\Lambda(x)} x,$$

wobei $a(x)$ eine Funktion der Zustände sein soll und b eine Konstante. Bestimmen Sie anschließend den Bereich im Zustandsraum wo $\Lambda(x)$ positiv definit ist.

- c) *Berechnen* Sie den maximalen Teilbereich des Einzugsbereiches der Ruhelage $x_R = 0$, welcher mit Hilfe der Ljapunov-Funktion von Punkt (a) beschrieben werden kann.

Lösung

a) $\dot{V}(x) = -x_1^2 - x_2^2 + \underbrace{2x_1^3x_2}_{\leq x_1^2(x_1^2+x_2^2)} < 0$, für $x_1 < 1 \Rightarrow$ asym. stabil.

- b) $a(x) = 1 - 2x_1x_2$, $b = 1$. Für den Bereich ergibt sich somit: $2x_1x_2 < 1$ ($\Leftarrow$ Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn all ihre Hauptabschnittsdeterminanten größer Null sind).

- c) Um den maximalen Teilbereich des Einzugsbereiches zu finden, muß man die größte Niveaumenge der Ljapunov-Funktion V bestimmen die noch ganz im Bereich $\{x \mid 2x_1x_2 < 1\}$ liegt (Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung):

$$\begin{array}{ll} \max & V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \\ \text{NB} & 2x_1x_2 < 1. \end{array}$$

Unter Berücksichtigung von $x_2 = \frac{1}{2x_1}$ erhält man nach Ableiten und Nullsetzen von V ($V_{x_1} \stackrel{!}{=} 0$) $x_{1,max}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{max} = \frac{1}{2}$, d.h. der maximale Teilbereich des Einzugsbereiches ist $\{x \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Hinweis: Die naheliegende Vermutung das System sei global asymptotisch stabil, aufgrund der Argumentation: $\dot{x}_2 = -x_2 \Rightarrow x_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \dot{x}_1 \approx -x_1$ für $t \gg \Rightarrow x_1 \rightarrow 0$, ist falsch. Durch explizites Lösen der Differentialgleichung erhält man für den (wahren) Einzugsbereich: $x_1x_2 < 1$ (siehe Abbildung 7).

Aufgabe 25 (Chetaevs Instabilitätstheorem)

Die Stabilität des linearen Systems

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x.$$

soll untersucht werden. Ein Kollege von Ihnen behauptet, mit Chetaevs Instabilitätstheorem nachweisen zu können, dass das System instabil ist, da mit $V(x) = x_1$ und $x^* = \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^T$, $\epsilon > 0$ die Bedingungen $V(0) = 0$, $V(x^*) > 0$ mit $\|x^*\|$ beliebig klein und $\dot{V}(x^*) = \epsilon > 0$ alle erfüllt sind. überprüfen Sie die Aussage Ihres Kollegen.

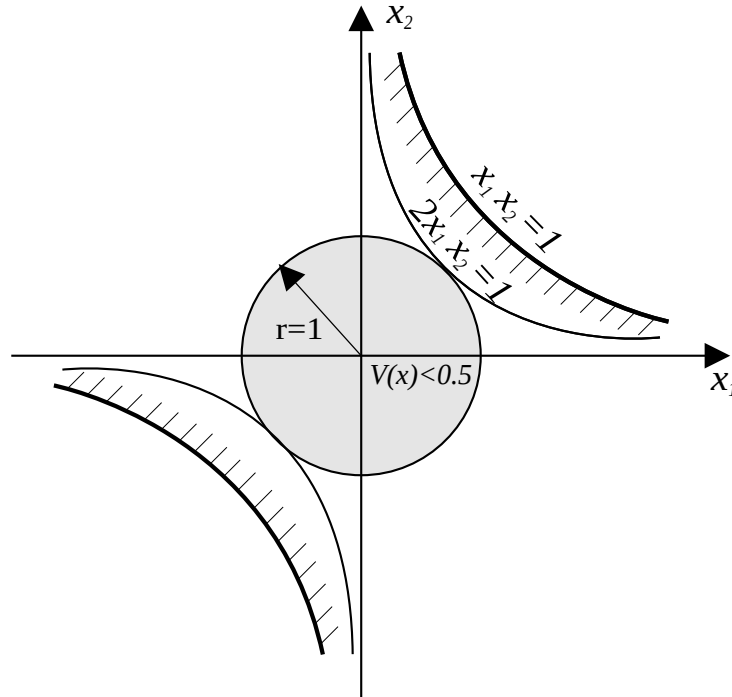


Abbildung 7: Einzugsbereich.

Lösung

Die Stabilität des gegebenen Systems kann leicht überprüft werden, indem die Eigenwerte der Dynamikmatrix untersucht werden. Diese können aufgrund der Dreiecksform der Matrix direkt abgelesen werden: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Das System ist folglich asymptotisch stabil.

Chetaevs Instabilitätstheorem ist hier nicht anwendbar. Die richtigen Bedingungen wären $V(0) = 0$, $V(x^*) > 0$ für $\|x^*\|$ beliebig klein und $\dot{V} > 0$ (im Sinne von positiv definit). $\dot{V}|_{x=x^*} > 0$ reicht also nicht aus, um Instabilität nachzuweisen.

Aufgabe 26 (Kontroll Ljapunov-Funktion, Backstepping)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}$$

wobei f eine beliebige nichtlineare Funktion von x_1 ist mit $f(0) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1 + f(x_1))^2$$

für Systeme der angegebenen Struktur (obere Dreiecksform) durch eine geeignete Wahl von $u = k(x_1, x_2)$ immer als Ljapunov-Funktion des geschlossenen Regelkreises benutzt werden kann.

Hinweis: Verwenden Sie die Transformation $\xi = x_1 + x_2 + f(x_1)$

- (b) Interpretieren Sie die Aussage in Teilaufgabe (a) bezüglich Stabilisierbarkeit des nichtlinearen Systems.

Lösung

- a) Die Transformation $\xi = x_1 + x_2 + f(x_1)$ ist so gewählt, dass sich für $\xi = 0$ die stabile Dynamik $\dot{x}_1 = -x_1$ ergibt.

In den neuen Koordinaten (x_1, ξ) lautet die Funktion $V(x_1, \xi) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}\xi^2$. Das System ergibt sich zu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \xi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 + \xi \\ (-x_1 + \xi)(1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}) \end{pmatrix}}_{F(x_1, \xi)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{G(x_1, \xi)} u.$$

Die Ableitung der Funktion $V(x_1, \xi)$ entlang der Trajektorien des Systems ergibt sich zu

$$\dot{V} = L_F V(x_1, \xi) + L_G V(x_1, \xi) u = -x_1(x_1 - \xi) - \xi \left[(x_1 - \xi) \left(1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) - u \right].$$

Falls $\xi = 0$ gilt $\dot{V} = -x_1^2 < 0$, falls $\xi \neq 0$ ist $L_G V(x_1, \xi) \neq 0$, somit kann negativität von $\dot{V}$ durch eine geeignete Wahl von u immer erreicht werden (eine solche Funktion V wird Kontroll Ljapunov-Funktion genannt). Mit $u = (x_1 - \xi) \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2\xi$ ergibt sich z.B. $\dot{V} = -x_1^2 - \xi^2$. Der geschlossene Kreis ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \xi \\ \dot{\xi} &= -x_1 - \xi, \end{aligned}$$

wobei $x_1 = 0, \xi = 0$ eine asymptotisch stabile Ruhelage ist. Da $x_2 = \xi - x_1 - f(x_1)$, folgt mit $f(0) = 0$, dass auch $x_2 = 0$ asymptotisch stabil ist. Somit ist $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1 + f(x_1))^2$ eine Ljapunov-Funktion und $u = -(-x_1 + \xi) \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2(x_1 + f(x_1) + x_2)$ ein stabilisierender Regler für das nichtlineare System.

- b) Alle nichtlinearen Systeme von dieser Struktur (obere Dreiecksstruktur) sind stabilisierbar. In der Literatur wird dieser Reglerentwurf für nichtlineare Systeme von dieser Struktur als Backstepping bezeichnet.

Aufgabe 27(Stability)²

Die berühmte Regelungstechnikerin Wanda B. Stable versuchte einige Tage lang das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 u_2 + x_2 u_1 \end{aligned}$$

zu stabilisieren - ohne Erfolg. Ist es möglich, ein differenzierbares Regelgesetz $u(x)$ zu finden, so dass die Ruhelage $x = 0$ asymptotisch stabil wird? (Tipp: Betrachten Sie die Funktion $H = x_3 - x_1 x_2$.)



Abbildung 8: A. M. Ljapunov, 1857-1918.

Lösung

Es gilt $\dot{H} = 0$, daher gilt für die Lösung $x(t)$ stets $H(x(t)) = H(x(t_0))$ für alle t , unabhängig davon, was für ein $u(x)$ benutzt wird. Wenn also eine Anfangsbedingung $x(t_0)$ gewählt wird mit $H(x(t_0)) \neq H(0)$ (existiert beliebig nahe an der Ruhelage $x = 0$), dann kann nicht $x(t) \rightarrow 0$ gelten. Das System kann daher niemals asymptotisch stabil werden.

Aufgabe 28 (LQ-Regler)

Gegeben sei das skalare System

$$\dot{x} = ax + bu, \quad x_0 = x(0),$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $x(t) \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie den LQ-Regler $u(x) = -kx$ so, dass

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty qx^2 + ru^2 dt \stackrel{!}{=} \min,$$

mit $q, r > 0$.

- Bestimmen Sie nun einen Regler $u(x) = -kx$, der das System mit minimaler Stellenergie stabilisiert, d.h. $q \rightarrow 0$.

²Übernommen von: Department of Automatic Control, Lund.

Lösung

- Die algebraische Riccati-Gleichung lautet

$$2ap - \frac{1}{r}b^2p^2 + q = 0.$$

Aus dieser quadratischen Gleichung erhält man genau eine positive Lösung

$$p = \frac{r}{b^2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q}{r}} \right).$$

Für $k = \frac{1}{r}bp$ ergibt sich somit

$$k = \frac{1}{b} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2 \frac{q}{r}} \right).$$

- Der Grenzübergang $q \rightarrow 0$ liefert:

$$k = \begin{cases} 0 & : \text{ falls } a < 0 \text{ (open loop!)} \\ 2a/b & : \text{ falls } a > 0. \end{cases}$$

Bemerkung: Man beachte, dass für den Fall $a > 0$ eine zweite Lösung $k = 0$ ($p = 0$) existiert. Der resultierende Regelkreis wäre jedoch instabil. Grund dafür ist, dass die Voraussetzungen für den LQR-Entwurf nicht mehr erfüllt sind - Detektierbarkeit im Kostenfunktional geht verloren!

Aufgabe 29 (LQ-Regler)

Gegeben sei das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=b} u,$$

und ein Gütekriterium

$$J = \int_0^\infty [(c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3)^2 + ku^2]d\tau$$

mit $c_1, c_2 \neq 0$ und $k > 0$.

- Bestimmen Sie die Matrizen Q und R für das Gütekriterium in der Form $J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) d\tau$.
- Ergibt sich aus der Riccati-Gleichung ein eindeutiger und stabilisierender Regler?
- Der LQR Regler wird durch $u = kx$, $k = -R^{-1}b^T P$ beschrieben. Sind die folgenden Matrizen im Prinzip mögliche Lösungen für den Regler K ? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$(i) \quad P = \begin{bmatrix} 0.52 & 0.31 & 0.25 \\ 0.29 & 0.21 & 0.45 \\ 0.45 & 0.25 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \quad P = \begin{bmatrix} 2.16 & 0.60 & 0 \\ 0.60 & 0.18 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \quad P = \begin{bmatrix} 0.88 & 0.42 & 0.31 \\ 0.42 & 0.1 & 0.23 \\ 0.31 & 0.23 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösung

•

$$Q = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad R = k.$$

- Einen eindeutigen und stabilisierenden Regler kann mit der Riccati-Gleichung erhalten, wenn das Paar $[A, b]$ stabilisierbar und das Paar $[A, M]$ mit $M^T M = Q$ entdeckbar ist. Das Paar $[A, b]$ ist stabilisierbar und das Paar $[A, M]$ mit $M = [c_1 \ c_2 \ c_3]$ ist wegen $c_1, c_2 \neq 0$ entdeckbar. Daher kann ein eindeutiger und stabilisierender Regler mittels der Riccati-Gleichung berechnet werden.
- (i) Nein. Nicht symmetrisch.
(ii) Ja. Im Prinzip möglich.
(iii) Nein. Nicht positiv definit.
(iv) Ja. Im Prinzip möglich.

Aufgabe 30 (Eigenschaften des LQ-Reglers)

Gegeben sei der in Abbildung 9 gezeigte Regelkreis mit der Strecke $\dot{x} = Ax + bu$ und

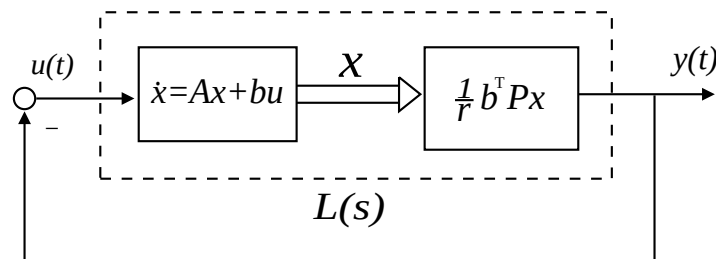


Abbildung 9: Regelkreis mit LQ-Regler.

dem LQ-Regler $u(x) = -\frac{1}{r}b^T Px$, wobei P Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung ist.

- a) Bestimmen Sie den Vektor c^T so, dass gilt: $L(s) = c^T(sI - A)^{-1}b$.
- b) Zeigen Sie durch Umformen, dass folgende Beziehung (Kalman's Frequency Formula) gilt:

$$L(s) + L(-s)^T = rc^T(sI - A)^{-1}P^{-1}(-A^TP - PA)P^{-1}(-sI - A^T)^{-1}c.$$

- c) Benützen Sie das Ergebnis von (b) um die Ungleichung (Return Difference Inequality³)

$$|1 + L(j\omega)|^2 \geq 1$$

zu beweisen (**Hinweis:** Sie benötigen dazu die algebraische Riccati-Gleichung).

- d) Zeigen Sie durch graphische Überlegungen in Nyquist-Diagramm, dass die Ungleichung in (c) eine Phasenreserve von mindestens 60° und eine Amplitudenreserve im Bereich $[0.5, \infty)$ impliziert.

Lösung

- a) $c^T = \frac{1}{r}b^TP$ bzw. $b = rP^{-1}c$.

b)

$$\begin{aligned} L(s) + L(-s)^T &= c^T(sI - A)^{-1}b + b^T(-sI - A^T)^{-1}c \\ &= c^T(sI - A)^{-1}rP^{-1}c + rc^TP^{-1}(-sI - A^T)^{-1}c \\ &= rc^T(sI - A)^{-1}P^{-1} \left(\underbrace{(-sI - A^T)P + P(sI - A)}_{-A^TP - PA} \right) P^{-1}(-sI - A^T)^{-1}c. \end{aligned}$$

- c) Es gilt

$$|1 + L(j\omega)|^2 = 1 + L(j\omega) + L^T(-j\omega) + L(j\omega)L^T(-j\omega)$$

sowie

$$L(j\omega)L^T(-j\omega) = c^T(j\omega I - A)^{-1}P^{-1}r^2cc^TP^{-1}(-j\omega I - A^T)^{-1}c.$$

Unter Zuhilfenahme von b) erhalten wir somit

$$\begin{aligned} |1 + L(j\omega)|^2 &= 1 + rc^T(j\omega I - A)^{-1}P^{-1} \underbrace{(-A^TP - PA + rcc^T)}_{=Q \geq 0, \text{ aus Riccati-Gl.}} P^{-1}(-j\omega I - A^T)^{-1}c \\ &= 1 + \underbrace{r(c^T(j\omega I - A)^{-1}P^{-1})Q(c^T(j\omega I - A)^{-1}P^{-1})^*}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

- d) Betrachten Sie dazu Abbildung 10. Aufgrund der Ungleichung aus Punkt c) kann der grau schattierte Bereich im Nyquist-Diagramm niemals von der Ortskurve durchlaufen werden. Aus dem Verlauf von $L_1(j\omega)$ (kein Pol in der rechten Halbebene) sieht man, dass die Phasenreseve immer größer gleich 60° betragen muß, da der mit einem LQ-Regler entworfene Regelkreis immer stabil ist. Aus dem Verlauf von $L_2(j\omega)$ (zwei Pole in der rechten Halbebene) sieht man, dass die Amplitude maximal um den Faktor 2 verkleinert werden darf bzw. beliebig vergrößert werden darf ohne die Stabilität des Regelkreises zu verlieren. Somit ergibt sich eine Amplitudenreserve von mindestens 0.5. (Man kann auch zeigen, dass diese Eigenschaften im Mehrgrößenfall gelten).

³Für $r(t) \equiv 0$ ist die Rückführdifferenz $u(s) - y(s) = (1 + L(s))u(s)$.

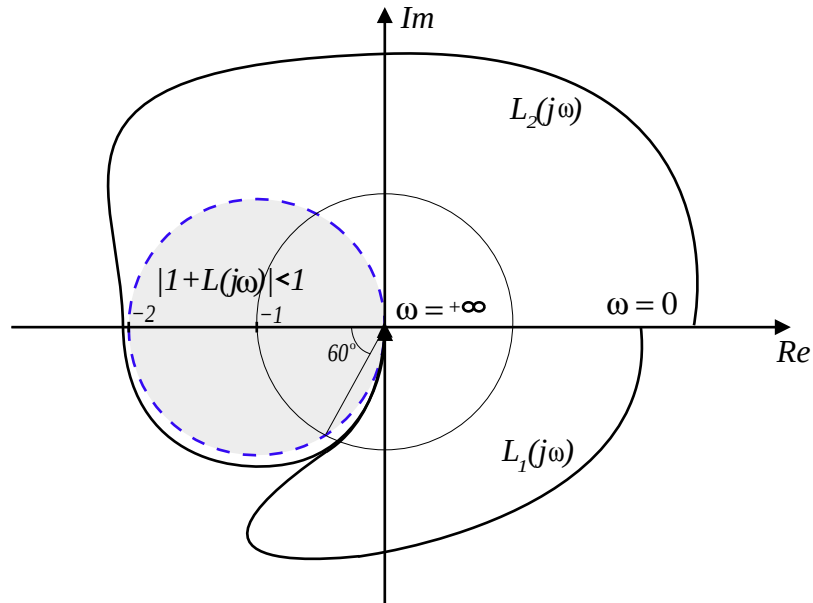


Abbildung 10: Nyquist-Diagramm.

Aufgabe 31 (Eigenschaften des LQG-Reglers)⁴

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_A x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_b u \cdot \Delta + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_g w \\ y &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} x + v, \end{aligned}$$

wobei x_1, x_2 die Zustandsvariablen bezeichnen, u, y bezeichnen den Ein- bzw. Ausgang des Systems und w, v bezeichnen weißes Rauschen mit den Intensitäten $\sigma > 0$ bzw. 1. Weiters sei Δ ein unbekannter (konstanter) Parameter. Im folgenden soll ein LQG-Reglerentwurf durchgeführt werden (siehe Abbildung (11)).

- a) Berechnen Sie den LQ-Regler $k = R^{-1}b^T P$ ($u = -k^T \hat{x}$) für die Gewichtungsmatrizen

$$Q = q \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R = 1,$$

in Abhängigkeit des Parameters $q > 0$ und für den nominellen Fall $\Delta = 1$.

Hilfestellung: Die Lösung $P = P(q)$ der algebraischen Riccati-Gleichung hat folgende Struktur:

$$P = \begin{bmatrix} t & g \\ g & g \end{bmatrix}.$$

⁴Doyle, IEEE-AC Vol. 23, Issue 4, 1978. (e),(f) sind Zusatzaufgaben.

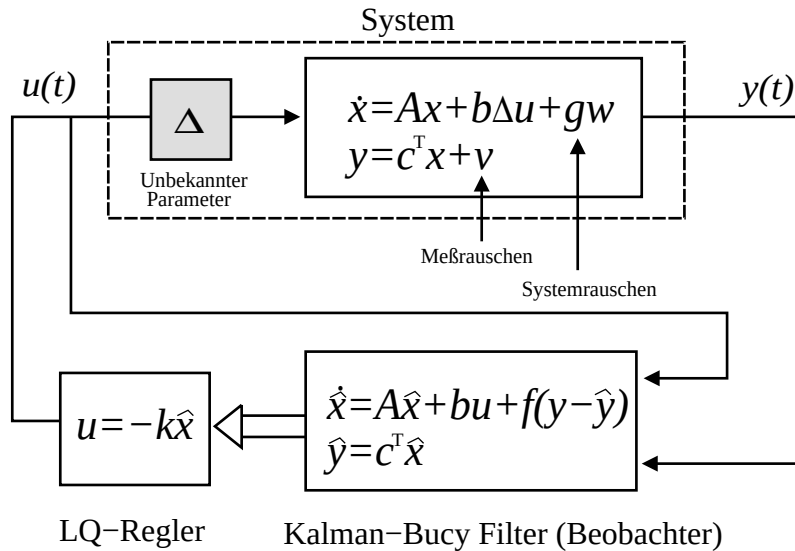


Abbildung 11: Ausgangsregelung mit LQ-Regler und Kalman-Bucy Filter.

- b) Es wird angenommen das alle Zustände meßbar sind (Zustandsrückführung, $u = -k^T x$). In welchem Bereich darf der konstante Parameter Δ liegen, ohne den Kreis (System+LQ-Regler) zu destabilisieren?
- c) Als nächstes soll der Fall betrachtet werden, dass nicht alle Zustände meßbar sind. Berechnen Sie das Kalman-Bucy Filter $f = \tilde{R}^{-1} c^T \Sigma$ für die oben angegebenen Intensitäten in Abhängigkeit des Parameters $\sigma > 0$ ($\Delta = 1$).
- d) Stellen Sie die Dynamikmatrix $\tilde{A}$ des geschlossenen Kreises (System + Regler + Kalman-Bucy Filter) in Abhängigkeit der Parameter q, σ, δ auf:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ? \\ \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix},$$

wobei $\hat{x}$ der geschätzte Zustand des Kalman-Bucy Filters ist und das Rauschen nicht berücksichtigt werden soll ($v = w = 0$).

- (e)★ Bestimmen Sie das charakteristische Polynom des geschlossenen Kreises. Hilfestellung:

$$\det \begin{bmatrix} 1-s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & -a & -a \\ d & 0 & 1-d-s & 1 \\ d & 0 & -d-f & 1-f-s \end{bmatrix} = s^4 + s^3(f+d-4) + s^2(df-2f-2d+6) + s(-2df+f+2ad+d-4) + (1-ad+df)$$

- (f)★ Zeigen Sie, durch geeignete Wahl der Parameter q und σ , dass bereits beliebig kleine Abweichung des Parameters Δ vom nominellen Wert 1 zu Instabilität führen kann. Interpretieren Sie dieses Resultat. Was bedeutet dies für die Amplitudenreserve?

Lösung

- a) Durch Einsetzen in die algebraische Riccati-Gleichung

$$A^T P + PA - PbR^{-1}b^T P + Q = 0$$

erhält man $g = 2 + \sqrt{4+q}$. Somit ergibt sich für k

$$k^T = g \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

- b) $\Delta \in [0.5, \infty)$ (Amplitudenreserve des LQ-Reglers).

- c) Mit $\tilde{R} = 1$, $\tilde{Q} = \sigma$ und $g\tilde{Q}g^T = Q$ sowie $c = Tb$, wobei

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = T^T = T,$$

ergibt sich eine ähnliche Riccati-Gleichung wie unter Punkt (a)⁵, nämlich

$$\Sigma A^T + A\Sigma - \Sigma TbR^{-1}b^T T\Sigma + g\tilde{Q}g^T = 0.$$

Multiplikation von rechts und von links mit T führt auf die Riccati-Gleichung aus Punkt (a). Somit gilt $T\Sigma T = P$, wobei q durch σ zu ersetzen ist. Es ergibt sich

$$f^T = \underbrace{TP}_{\Sigma} \underbrace{Tb}_c \tilde{R}^{-1} = TPbR^{-1} = h \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

mit $h = 2 + \sqrt{4+\sigma}$.

- d) Für die Dynamikmatrix erhält man aus

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - bk^T \hat{x} \cdot \Delta \\ \dot{\hat{x}} &= fc^T x + (A - bk^T - fc^T) \hat{x} \end{aligned}$$

die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\Delta g & -\Delta g \\ h & 0 & 1-h & 1 \\ h & 0 & -h-g & 1-g \end{bmatrix}.$$

- (e+f) Durch Einsetzen in die angegebene Formel für die Determinante sieht man, dass nur die ersten beiden Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von Δ abhängen:

$$1 + (1 - \Delta)gh + s[h + g - 4 + 2(\Delta - 1)gh] + \dots$$

Die notwendige Vorzeichenbedingung fordert, dass beide Terme größer Null sein müssen. Für hinreichend große g, h (q, σ) jedoch, reichen bereits beliebig kleine Abweichungen von $\Delta = 1$ aus um den Regelkreis zu destabilisieren. Die Amplitudenreserve des geschlossenen Kreises kann also beliebig klein werden. Zusammenfassend bedeutet dies, dass der LQG-Entwurf nicht unbedingt robust stabil⁶ ist und dies obwohl der LQ-Regler sowie das Kalman-Bucy Filter (getrennt betrachtet) robust sind.

⁵Dualität.

⁶Im Sinne einer Amplituden- und Phasenreserve.

Aufgabe 32 (Exakte E/A-Linearisierung)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 + 2x_1^2 \\ x_3 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} u$$

$$y = \underbrace{x_1}_{\mathbf{h}(\mathbf{x})}.$$

- Bestimmen Sie den relativen Grad r des Systems.
- Transformieren Sie das System in die B/I-Normalform, wobei $\eta = x_3$ die Zustandsvariable der Nulldynamik sein soll.
- Bestimmen Sie den Gültigkeitsbereich $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der aus Punkt b) erhaltenen nichtlinearen Koordinatentransformation $[\xi_1 \ \xi_2 \ \eta_1]^T = \Phi(x)$.
- Entwerfen Sie einen Zustandsregler $u(x)$ der das E/A-Verhalten des Systems exakt linearisiert und die Ruhelage $x_R = 0$ global asymptotisch stabilisiert.
- Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulldynamik des Regelkreises.
- Entwerfen Sie nun einen Zustandsregler $u(x)$ für das System so, dass der Ausgang $y(t)$ einem sinusförmigen Referenzsignal $y_{ref}(t)$ für hinreichend große Zeiten folgen kann, d.h. $y(t) \xrightarrow{!} y_{ref}(t) := \sin(t)$ für $t \rightarrow \infty$ (Tracking-Problem).

Lösung

a) $L_{\mathbf{g}}h(x) = 0$, $L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}h(x) = 1 \Rightarrow r = 2$.

b) B/I-Normalform:

$$\xi_1 = h(x) = x_1$$

$$\xi_2 = L_{\mathbf{f}}h(x) = 2x_1^2 + x_2$$

$$\eta_1 = x_3$$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2$$

$$\dot{\xi}_2 = 8x_1^3 + 4x_1x_2 + x_3 + u = 4\xi_1\xi_2 + \eta_1 + u$$

$$\dot{\eta}_1 = \xi_1 - \eta_1$$

c)

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1^2 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \Phi(x)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4x_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{regulär, für alle } x \in \mathbb{R}^3.$$

Die Transformation $\Phi(x)$ ist eineindeutig (bijektiv) und stetig differenzierbar, ebenso wie ihre Inverse, für alle $x \in \mathbb{R}^3$ (globaler Diffeomorphismus ⁷).

d) Für lineares E/A-Verhalten (von $v \rightarrow y$) wählt man $u = -(4\xi_1\xi_2 + \eta_1) + v$ und zur Stabilisierung des Ausganges y wählt man $v = -k_1\xi_1 - k_2\xi_2$, $k_i > 0$.

e) Die Nulldynamik ist invariant unter Zustandsrückführung. Deshalb entspricht die Nulldynamik des geschlossenen Kreises der Nulldynamik des offenen Kreises. Die Nulldynamik ($\xi_1, \xi_2 \equiv 0$) $\eta_1 = -\eta_1$ ist global asymptotisch stabil (d.h. das System ist minimalphasig).

f) Neue Koordinaten für die E/A-Dynamik („Fehlerkoordinaten“):

$$e_1 = \xi_1 - y_{\text{ref}}$$

$$e_2 = \xi_2 - \dot{y}_{\text{ref}}$$

Damit ergibt sich für die Fehlerdifferentialgleichung:

$$\dot{e}_1 = e_2$$

$$\dot{e}_2 = \dot{\xi}_2 - \ddot{y}_{\text{ref}}$$

mit gleichem u wie in Punkt (d) ergibt sich

$$= v - \ddot{y}_{\text{ref}}$$

Wählt man $v = -k_1e_1 - k_2e_2 + \ddot{y}_{\text{ref}}$, $k_i > 0$, $y_{\text{ref}}(t) = \sin(t)$, so folgt $e_i(t) \rightarrow 0$, bzw. $\xi_1(t) = y(t) \rightarrow y_{\text{ref}}(t)$, für $t \rightarrow \infty$.

Aufgabe 33 (Exakte E/A Linearisierung)

Gegeben sei das System

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_3$$

$$\dot{x}_2 = -x_1x_3 - 2x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + u.$$

Weiterhin gegeben seien vier mögliche Ausgänge des Systems, die im weiteren untersucht werden sollen nämlich

$$y = x_1, \tag{33.a}$$

$$y = x_2, \tag{33.b}$$

$$y = x_3, \tag{33.c}$$

$$y = x_2 + x_3. \tag{33.d}$$

a) Für welche der möglichen Ausgänge ist das System in der Umgebung von $x = \mathbf{0}$ exakt zustandslinearisierbar?

b) Für welche der möglichen Ausgänge ist das System in der Umgebung von $x = \mathbf{0}$ exakt E/A linearisierbar?

Lösung

⁷Hadamard, 1906: $(\Phi(x) \text{ ist globaler Diffeomorphismus}) \Leftrightarrow (\Phi_x(x) \text{ ist regulär für alle } x \text{ und } \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\Phi(x)| = \infty)$

- a) Für (33.a), denn der relative Grad des Ausgangs ist $r = 3$.
b) Für (33.a), (33.c) und (33.d) ist die exakte E/A linearisierung durchführbar. Im Falle des Ausgangs aus (33.b) ist die Nulldynamik instabil (verwende die Lyapunovfunktion $V = \frac{1}{2}x_1^2 + \int_0^{x_3} \xi d\xi$).

Aufgabe 34 (Exakte E/A-Linearisierung)

Es soll die Position einer Kugel auf einem Balken (Balkenträgheitsmoment J , Antriebsdrehmoment M) geregelt werden. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 12 dargestellt. Die

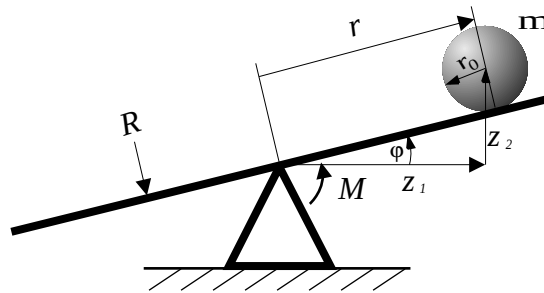


Abbildung 12: Kugel-Balken System.

vereinfachten Bewegungsgleichungen (Kugelradius r_0 sehr klein) lauten:

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{mr^2 + J} (-2m\dot{r}r\dot{\varphi} - gmr \cos(\varphi) + M)$$

$$\ddot{r} = \frac{5}{7}(r\dot{\varphi}^2 - g \sin(\varphi)),$$

wobei M der Eingang des Systems ist.

- a) Welche Zustandsrückführung $u = u(M, r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})$ liegt der Zustandsraumdarstellung

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{5}{7}(x_1 x_4^2 - g \sin(x_3)) \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g(x)} u$$

$$y = \underbrace{x_1 - R}_{h(x)}.$$

mit $x = (r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi})^T$ zugrunde?

- b) Bestimmen Sie den relativen Grad r des Systems.
c) Entwerfen Sie einen Zustandsregler $u(x)$ mit Hilfe der exakten E/A-Linearisierung so, dass die Kugel für hinreichend große Zeiten die Position R einnimmt.

Lösung

a) Zustandsrückführung („Eingangstransformation“: Alter Eingang $M \rightarrow$ Neuer Eingang u)

$$u := \frac{1}{mr^2 + J}(-2mx_1x_2x_4 - gmx_1 \cdot \cos(x_3) + M) = \dot{x}_4$$

b) $\ddot{y} = \frac{5}{7}(x_2x_4^2 + 2x_1x_4u - gx_4 \cos(x_3))$ Das System besitzt einen nicht wohldefinierten relativen Grad $r = 3$.

c) Mit dem Zustandsregler $u = \frac{1}{2x_1x_4}(-x_2x_4^2 + gx_4 \cos(x_3) + v)$ ergibt sich das lineare E/A-Verhalten $\ddot{y} = \frac{5}{7}v$. Problem: Aufgrund des nicht wohldefinierten relativen Grades geht $u \rightarrow \infty$ für $x_4 = \varphi \rightarrow 0$ bzw. $x_1 \rightarrow 0$ ($R = 0$). Die exakte E/A-Linearisierung ist somit nicht anwendbar (Abhilfe: Näherungsweise E/A-Linearisierung).

Zur Modellbildung:

Mit

$$z_1(r, \varphi) = r \cos(\varphi) - r_0 \sin(\varphi)$$

$$z_2(r, \varphi) = r \sin(\varphi) - r_0 \cos(\varphi)$$

ergibt sich für die Lagrangesche Funktion

$$L(\varphi, \dot{\varphi}, r, \dot{r}) = \underbrace{\frac{1}{2} \left(J\dot{\varphi}^2 + m \left[\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \frac{2}{5}r_0^2 \left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{r}}{r_0} \right)^2 \right] \right)}_{E_{\text{kin}}} - \underbrace{mgz_2}_{E_{\text{pot}}}$$

Unter Vernachlässigung von r_0 ($r_0 \rightarrow 0$) und mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} L - \frac{\partial}{\partial r} L &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} L - \frac{\partial}{\partial \varphi} L &= M \end{aligned}$$

ergeben sich schlußendlich die vereinfachten Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= \frac{1}{mr^2 + J}(-2m\dot{r}r\dot{\varphi} - gmr \cdot \cos(\varphi) + M) \\ \ddot{r} &= \frac{5}{7}(r\dot{\varphi}^2 - g\sin(\varphi)). \end{aligned}$$

Aufgabe 35 (Exakte Linearisierung) Gegeben sei das folgende nichtlineare System:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1x_2 + x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(x)} u$$

mit der (hier betrachteten) Ruhelage $x_1 = x_2 = x_3 = u = 0$.

a) Angenommen es ist eine Ausgangsgleichung $y = h(x)$ gegeben. Welche Bedingung(en) muß $y = h(x)$ erfüllen, so dass das System mit diesem Ausgang vollständig zustandslinearisiert werden kann?

- b) Bestimmen (raten) Sie einen “virtuellen” Ausgang $y = h(x)$, so dass das System exakt zustandslinearisierbar ist. Weisen Sie nach, dass die Bedingung(en) aus (a) erfüllt ist (sind).
- c) Geben Sie einen Diffeomorphismus (Koordinatentransformation) $z = \Phi(x)$ an, welcher das System in z Koordinaten in Byrnes/Isidori Normalform ohne Nulldynamik transformiert?
- d) Bestimmen Sie den relativen Grad bezüglich des Ausgangs $y = x_2$.
- e) Es wird nun folgende Koordinatentransformation vorgeschlagen:

$$z = \Phi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Ist dies ein lokaler (in der Umgebung von $x_1 = x_2 = x_3 = 0$) Diffeomorphismus?

- f) Geben Sie den E/A linearisierenden Regler für das gegebene System mit dem Ausgang $y = x_2$ an?
- g) Geben Sie die Nulldynamik für das gegebene System mit dem Ausgang $y = x_2$ an?

Lösung

- a) $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^i h(x) = 0$ für $i = 0, 1$ und $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h(x) \neq 0$.
- b) $\hat{y} = x_1$. $\hat{y}^{(3)} = \dots + \dot{x}_3 = \dots + x_2 + u$.
- c)

$$\begin{aligned} z_1 &= \hat{y} = x_1 \\ z_2 &= \dot{\hat{y}}_1 = x_1^2 + x_2 \\ z_3 &= \ddot{\hat{y}}_1 = 2x_1(x_1^2 + x_2) + (x_1 x_2 + x_3) \end{aligned}$$

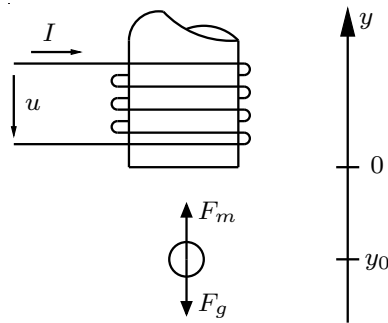
- d) $r = 2$.
- e) Die Jacobimatrix von Φ ist gegeben durch

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_2 & x_1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. die Jacobimatrix von Φ ist regulär für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und damit ist Φ ein lokaler Diffeomorphismus.

- f)

$$\begin{aligned} y &= x_2 \\ \ddot{y} &= (x_1^2 + x_2)x_2 + x_1(x_1 x_2 + x_3) + x_2 + u \\ \Rightarrow u &= -[(x_1^2 + x_2)x_2 + x_1(x_1 x_2 + x_3) + x_2] + v. \end{aligned}$$



	Bezeichnung	Wert
g	Erdbeschleunigung	9.81 m/s^2
k	Reibwiderstandskoeffizient	0.001 N s/m
m	Kugelmasse	0.1 kg
L_0	Induktivitätskonstante	0.01 H
L_1	Induktivitätskonstante	0.02 H
a	Konstante	0.05 m
R	Spulenwiderstand	$1 \text{ } \Omega$

Abbildung 13: Experiment mit schwebender Kugel.

g)

$$y = x_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\dot{y} = x_1 x_2 + x_3 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

Die verbleibende Dynamik ist somit: $\dot{x}_1 = x_1^2$.

Eine zweiter Lösungsweg besteht darin, das System mittels der Koordinatentransformation aus Punkt (e) in B/I-Normalform zu transformieren um den Regler (Punkt (f)) und die Nulldynamik (Punkt (g)) zu bestimmen.

Aufgabe 36 (Exakte Linearisierung)

Die Vertikalbewegung des Transrapid folgt den gleichen Gesetzen wie das in Abb. 13 dargestellte Experiment, bei dem eine Metallkugel von einem Elektromagneten in der Schwebe gehalten werden soll. Die Modellgleichungen lauten

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0 a x_3^2}{2m(a + x_1)^2}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{L(x_1)} \left(-R x_3 + \frac{L_0 a x_2 x_3}{(a + x_1)^2} + u \right)$$

mit $L(x_1) = L_1 + \frac{L_0}{1+x_1/a}$. Die elektrische Spannung u ist die Stellgröße und die Position der Metallkugel $y = x_1$ ist die Regelgröße. Die Zustandsgröße x_3 entspricht dem elektrischen Strom I .

- Prüfen Sie, ob die Voraussetzungen für eine exakte Ein-/Ausgangslinearisierung des Systems erfüllt sind.
- Ist eine exakte Zustandslinearisierung möglich?

Lösung

a) Wir berechnen sukzessive

$$\begin{aligned}
 h(x) &= x_1 \\
 L_g h(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L(x_1)} \end{pmatrix} = 0 \\
 L_f h(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} f(x) = x_2 \\
 L_g L_f h(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L(x_1)} \end{pmatrix} = 0 \\
 L_f^2 h(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} f(x) \\
 &= g - \frac{k}{m} x_2 - \frac{L_0 a x_3^2}{2m(a+x_1)^2} \\
 L_g L_f^2 h(x) &= \begin{pmatrix} * & * & -\frac{L_0 a x_3}{m(a+x_1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L(x_1)} \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{L_0 a x_3}{m(a+x_1)^2} \frac{1}{L(x_1)}.
 \end{aligned}$$

Das System hat vollen relativen Grad $r = n = 3$ und besitzt somit keine Nulldynamik. Der relative Grad ist wohldefiniert für $x_3 \neq 0$ und $x_1 \neq -a$. In diesen Fällen ist also eine exakte Ein-/Ausganglinearisierung möglich.

b) Da das System keine Nulldynamik besitzt bzw. vollen relativen Grad hat erreicht eine Ein-/Ausganglinearisierung gleichzeitig lineare Zustandsgleichungen (es gibt nur die ξ -Koordinaten).

Aufgabe 37 (E/A-Linearisierung, “High-Gain” Ausgangsrückführung) Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1^3 + x_2 u \\
 \dot{x}_2 &= x_2^2 + u \\
 y &= x_2.
 \end{aligned}$$

Kann man das System mittels einer “High-Gain” Ausgangsrückführung, d.h. $u = -k y$ mit $k \gg 0$, lokal stabilisiert werden?

Lösung

Das nichtlineare System kann mittels “High-Gain” Ausgangsrückführung stabilisiert werden, wenn

- (i) das System einen relativen Grad 1 hat.
- (ii) die linearisierte Nulldynamik des Systems asymptotisch stabil ist.

Überprüfung von (i):

$$\begin{aligned}
 y &= x_2 \\
 \dot{y} &= x_2^2 + u
 \end{aligned}$$

⇒ Der relative Grad ist 1.

Überprüfung von (ii):

Nullodynamik: $\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3$, Linearisierte Nullodynamik: $\dot{x}_1 = -x_1$

⇒ Linearisierte Nullodynamik ist asymptotisch stabil ⇒ Für hinreichend großes k kann das nichtlineare System mittels $u = -ky = -kx_2$ lokal stabilisiert werden.

Aufgabe 38 (E/A-Linearisierung, Störrentkopplung)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 e^{x_1} \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + w \\ \dot{x}_3 &= \sin x_2 + u \\ y &= x_1,\end{aligned}$$

wobei $w \in \mathbb{R}$ eine beliebige Störung ist.

- Ist es möglich eine Zustandsrückführung $u = k(x)$ mit $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ zu entwerfen, so dass die Störung w keinen Einfluß auf den Ausgang y hat.
- Geben Sie eine Zustandsrückführung an, die das nichtlineare System stabilisiert und den Ausgang von der Störung w entkoppelt.

Lösung

- Störrentkopplung ist möglich wenn der relative Grad bezüglich w größer als der relative Grad bezüglich u ist. Ableitungen des Ausgangs $y = x_1$ sind:

$$\begin{aligned}y &= x_1 \\ \dot{y} &= x_3 e^{x_1} \\ \ddot{y} &= (\sin x_2 + u) e^{x_1} + x_3^2 e^{2x_1}.\end{aligned}$$

⇒ Der relative Grad bezüglich w ist größer als der relative Grad bezüglich u ⇒ Störrentkopplung ist möglich.

- Eine Zustandsrückführung, die das nichtlineare System stabilisiert und den Ausgang von der Störung w entkoppelt ist:

$$u = e^{-x_1} \left(-\sin x_2 e^{x_1} - x_3^2 e^{2x_1} - c_0 x_1 - c_1 x_3 e^{x_1} \right), \quad c_0 > 0, \quad c_1 > 0.$$

Aufgabe 39 (Exakte-Linearisierung)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \sin^2 x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= 2x_3 \cos^2 x_1 - 2u \\ \dot{x}_3 &= 2 \sin x_2 \\ y &= 2x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Geben Sie

- (b) eine Koordinatentransformation an, und
- (a) eine Zustandsrückführung $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ mit $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ an,

so dass das resultierende System ein lineares System

$$\dot{\xi} = A\xi + bv$$

ist, wobei (A, b) steuerbar sein soll.

Lösung

- Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned}z_1 &= 2x_1 + x_2 \\ z_2 &= 2x_3 \\ z_3 &= 4 \sin x_2.\end{aligned}$$

- Zustandsrückführung $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ mit $x = [x_1, x_2, x_3]^T$:

$$u = \frac{1}{L_g L_f^2 h} (v - L_f^3 h)$$

mit

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{bmatrix} x_3 \sin^2 x_1 \\ 2x_3 \cos^2 x_1 \\ 2 \sin x_2 \end{bmatrix} \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ h(x) &= 2x_1 + x_2.\end{aligned}$$

Aufgabe 40 (Byrnes/Isidori Normalform)

Gegeben sei das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 + u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \sin 2x_2 + (\cos x_1)u \\ y &= x_1.\end{aligned}$$

- (a) Transformieren Sie das System in eine Byrnes/Isidori Normalform so, so dass die interne Dynamik nicht direkt vom Eingang u abhängt.

Lösung

Neue Zustandsvariablen

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad \xi_1 = x_3, \quad \xi_2 = (\cos x_1)x_2 - x_4,$$

wobei ξ_1 und ξ_2 so gewählt wurden, dass die zwei Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} g(x) &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_4} (\cos x_1) \stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} g(x) &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_4} (\cos x_1) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Byrnes/Isidori Normalform:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \sin z_1 + u \\ \dot{\xi}_1 &= (\cos z_1)z_2 - \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= -(\sin z_1)z_2^2 - \frac{1}{2} \sin 2z_1 \\ y &= z_1. \end{aligned}$$

Aufgabe 41 (LMI)

Ist die Matrizenungleichung

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda)X & 0 & C^T \\ 0 & (\gamma^2 - \mu)I & D^T \\ C & D & I \end{bmatrix} > 0$$

mit den Unbekannten λ , X , μ und γ^2 eine lineare Matrizenungleichung (LMI)? Wieso (nicht)?

Lösung

Nein, da λ und X multipliziert werden.

Aufgabe 42 (Signalnormen)

Geben Sie für die folgenden Zeitsignale jeweils an, ob die zugehörige $\mathcal{L}_2$ -Norm und ob die zugehörige $\mathcal{L}_\infty$ -Norm endlich ist. Begründen Sie Ihre Aussagen kurz. Es werden keine Rechnungen verlangt.

a) $f(t) = 1 - e^{-t}$

b) $f(t) = \sin(t)$

Lösung

- a) $\|f(t)\|_2 = \infty$, da $f(t) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow \infty$.
 $\|f(t)\|_\infty = 1$, da $|f(t)| < 1$ und $f(t) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow \infty$.
- b) $\|f(t)\|_2 = \infty$, da das Integral über $\sin^2(t)$ unbeschränkt ist.
 $\|f(t)\|_\infty = 1$, da $|f(t)| \leq 1$.

Aufgabe 43 ($\mathcal{H}_\infty$ -Norm)

Geben Sie die $\mathcal{H}_\infty$ -Norm der folgenden Systeme an:

- a) $G_1(s) = \frac{5}{s+3}$
b) $G_2(s) = \frac{3s}{s+1}$
c) $G_3(s) = \frac{1}{s}$.

Lösung

Die $\mathcal{H}_\infty$ -Norm einer SISO-Übertragungsfunktion ist das Supremum der Amplitude über der Frequenz.

- a) $\|G_1\|_\infty = \frac{5}{3}$
b) $\|G_2\|_\infty = 3$
c) $\|G_3\|_\infty = \infty$

Aufgabe 44 ($\mathcal{H}_\infty$ -Regelung)

Sie sollen im Zuge eines $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurfs einen Regler finden, der das Kriterium

$$\left\| \begin{bmatrix} W_1 T \\ K S \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1$$

erfüllt, wobei W_1 ein dynamisches Gewicht, $T = GK(I + GK)^{-1}$ die komplementäre Sensitivität und $S = (I + GK)^{-1}$ die Sensitivität darstellen.

Zeichnen sie einen sinnvollen Amplitudengang des Gewichtes W_1 . Nennen Sie vier typische Entwurfsziele, die mittels der Wahl von W_1 formuliert werden können.

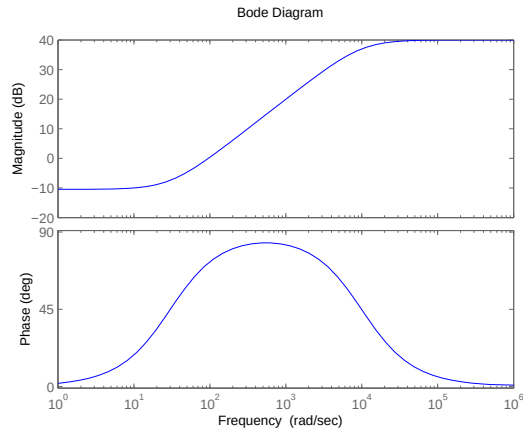


Abbildung 14: Lösung: Bode-Diagramm von W_1

Lösung

Mit W_1^{-1} wird eine gewünschte Oberschranke für die komplementäre Sensitivität gewählt. Eine mögliche Wahl von W_1 wird in Abbildung 14 dargestellt.

Entwurfsziele: Störgrößenunterdrückung, geringe bleibende Regelabweichung, Rauschunterdrückung, geringes Überschwingen.

Aufgabe 45 ($\mathcal{H}_\infty$ -Regelung)

Bei einem $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerentwurf soll ein Regler gefunden werden, der das sogenannte Model-Matching-Kriterium

$$\|T_{\text{ideal}} - T\|_\infty$$

minimiert, wobei $T = GK(I + GK)^{-1}$ die komplementäre Sensitivität und T_{ideal} ein vorgegebenes ideales Regelkreisverhalten darstellen.

- a) Zeichnen Sie ein Blockdiagramm des Entwurfsproblems mit den Teilsystemen G , K und T_{ideal} , und definieren Sie einen externen Eingang w sowie einen Ausgang z so, dass

$$z = (T_{\text{ideal}} - T)w$$

gilt.

- b) Bringen Sie den Regelkreis in die P - K -Struktur (Abbildung 15), d.h. bestimmen Sie P in Abhängigkeit von G und T_{ideal} .

Lösung

- a) Abbildung 16

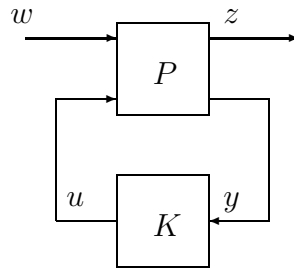


Abbildung 15: Standard-Regelungsproblem

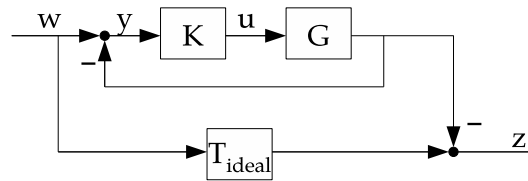


Abbildung 16: Lösung: Blockdiagramm des Entwurfsproblems

b) Gesucht ist die Darstellung:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

wobei y der Reglereingang und u der Reglerausgang sind. Daraus ergibt sich

$$P = \begin{bmatrix} T_{\text{ideal}} & -G \\ 1 & -G \end{bmatrix}$$

Aufgabe 46 (M - Δ -Struktur)

In dieser Aufgabe werde eine unsichere Strecke durch

$$G_{\text{real}}(s) = (I - 0.5\Delta_1(s))^{-1}G(s), \quad \|\Delta_1\|_{\infty} \leq 1,$$

also durch eine invers-multiplikative Ausgangsunsicherheit modelliert, wobei auch der Term

$$G(s) = \frac{1}{\alpha(s+1)}, \quad \frac{1}{6} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

einen unsicheren Parameter enthält.

- a) Welche Arten von Streckenunsicherheiten können durch die invers-multiplikative Ausgangsunsicherheit Δ_1 modelliert werden?

- b) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ mit Hilfe einer reellen skalaren Unsicherheit Δ_2 , $|\Delta_2| \leq 1$ als

$$G(s) = (4 + 2\Delta_2) \frac{1}{s+1}$$

dargestellt werden kann. (Hinweis: Ersetzen Sie α mit einem unsicheren Parameter β , der im Zähler steht.)

- c) Zeichnen Sie ein Blockdiagramm des geschlossenen Kreises aus Abbildung 17, wobei Δ_1 und Δ_2 an den entsprechenden Stellen auftauchen.
- d) Es sei $\Delta_1 = 0$. Leiten Sie die M - Δ -Struktur (Abbildung A.48)) zur Analyse der robusten Stabilität her, d.h. bestimmen Sie M .
- e) Es sei $\Delta_2 = 0$. Leiten Sie die M - Δ -Struktur (Abbildung A.48)) zur Analyse der robusten Stabilität her, d.h. bestimmen Sie M .

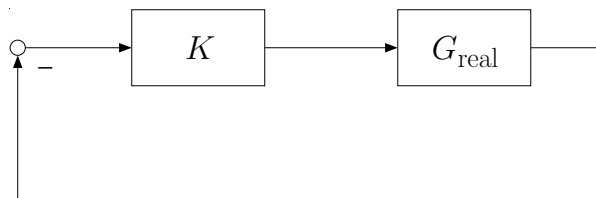


Abbildung 17: Unsicherer Regelkreis

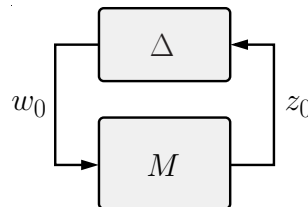


Abbildung 18: M - Δ -Struktur

Lösung

- a) Niedrigfrequente Parameter-Fehler, unsichere Pole.
- b) $G(s) = \beta \frac{1}{s+1}$ wobei $2 \leq \beta \leq 6$. Um die gesuchte Form zu bekommen, muss man erst den Mittelwert von β eliminieren und dann mit einem Parameter ersetzen, dessen Wertebereich $[-1, 1]$ ist:

$$\begin{aligned} G(s) &= (4 + \tilde{\beta}) \frac{1}{s+1}, \quad -2 \leq \tilde{\beta} \leq 2 \\ &= (4 + 2\Delta_2) \frac{1}{s+1}, \quad -1 \leq \Delta_2 \leq 1 \end{aligned}$$

- c) Abbildung 19

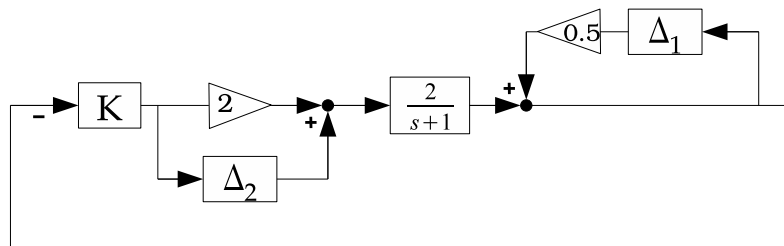


Abbildung 19: Lösung: Blockdiagramm des geschlossenen Kreises

d)

$$z_0 = -\frac{2K(s)}{s+1}(w_0 + 2z_0)$$

$$z_0 = \frac{-2K(s)}{4K(s) + s + 1}w_0$$

Daraus folgt $M = -\frac{2K(s)}{4K(s) + s + 1}$

e)

$$z_0 = 0.5w_0 - (4 + 2\Delta_2)\frac{1}{s+1}Kz_0$$

Daraus folgt $M = 0.5 \left(1 + \frac{(4+2\Delta_2)K}{s+1}\right)^{-1}$

Aufgabe 47 (M - Δ -Struktur, robuste Stabilität)

Gegeben sei der Regelkreis aus Abbildung 17. Das Modell der Strecke ist gegeben mit

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}. \quad (47.a)$$

- a) Das reale System unterscheidet sich vom Modell (47.a). Das reale System wird durch die Gleichung

$$G_{real} = \frac{1 - \tau s}{s(1+s)(1+\tau s)}, \quad 0 \leq \tau \leq 0.3,$$

beschrieben, wobei τ unbekannt ist. Bestimmen Sie eine multiplikative Unsicherheit Δ , so dass gilt $G_{real} = G(I + \Delta)$. Berechnen Sie die Norm $\|\Delta\|_\infty$ der Unsicherheit Δ .

- b) Leiten Sie die M - Δ -Struktur (Abbildung A.48)) her und wählen Sie dabei eine Gewichtsfunktion, so dass $\|\bar{\Delta}\|_\infty = 1$. Bestimmen Sie M .
- c) Zeigen Sie, dass es keinen P -Regler K gibt, so dass das System robust stabil für alle multiplikativen Unsicherheiten $\Delta(s)$ ist, für die gilt $\|\Delta\|_\infty < 2$.

Lösung

$$\text{a) } G_{real} = \underbrace{\frac{1}{s(1+s)}}_{G(s)} \underbrace{\left(1 - \frac{2\tau s}{1+\tau s}\right)}_{\Delta(s)}$$

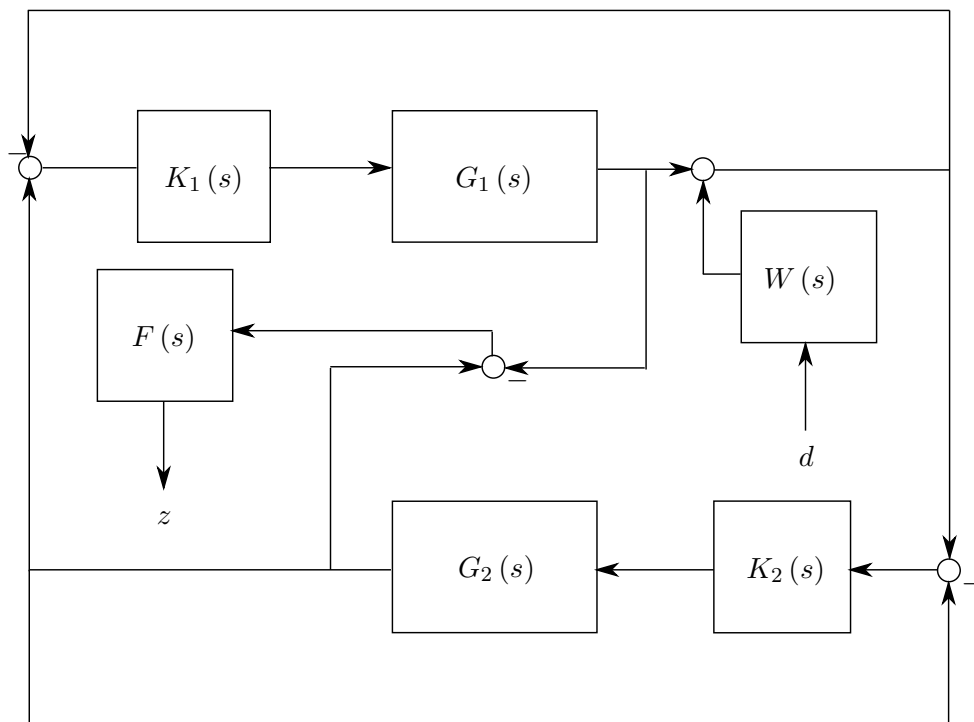
$$\|\Delta\|_{\infty} = 2$$

b) Die einfachste Wahl für eine Gewichtsfunktion ist $w_{\Delta} = 2$. In der M - Δ -Struktur ergibt sich dann $z_0 = -GK(2w_0 + z_0)$ und damit $M(s) = -\frac{2GK}{1+GK} = -\frac{2K}{s(1+s)+K}$.

c) Wenn man alle multiplikativen Unsicherheiten $\Delta(s)$ betrachtet, für die $\|\Delta\|_{\infty} < 2$ gilt, dann ist $w_{\Delta} = 2$ die beste mögliche Wahl. Notwendig für robuste Stabilität ist also, dass $\|M\|_{\infty} \leq 1$ mit $M(s) = -\frac{2K}{s(1+s)+K}$. Für reelle, skalare K ist aber $\|M\|_{\infty} = 2$.

Aufgabe 48 (P-K-Struktur)

Gegeben seien die in der Abbildung dargestellten Systeme mit Störung d . Der Ausgang z stellt die Differenz der Ausgänge von G_1 und G_2 dar. Der Einfluss der Störung auf diese Differenz soll hier bewertet werden.



a) Bringen Sie das Gesamtsystem auf P - K -Struktur! Geben Sie $P(s)$ und $K(s)$ an!

b) Geben Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises $P_{cl}(s)$ an!

c) Es seien nun $G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s}$, $K_1(s) = K_2(s)$ und $W(s) = F(s) = 1$. Bewerten Sie den Einfluss von d auf z in Abhängigkeit von $K(s)$!

Lösung

Es gilt

$$z = F(s) (-G_1(s) u_1 + G_2(s) u_2), \quad (48.1)$$

$$y_1 = G_2(s) u_2 - G_1(s) u_1 - W(s) d, \quad (48.2)$$

$$y_2 = G_1(s) u_1 + W(s) d - G_2(s) u_2, \quad (48.3)$$

was in kompakter Notation als

$$\begin{bmatrix} z \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -F(s)G_1(s) & F(s)G_2(s) \\ -W(s) & -G_1(s) & G_2(s) \\ W(s) & G_1(s) & -G_2(s) \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} d \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (48.4)$$

geschrieben werden kann. Dann ist außerdem $K(s) = \text{diag}(K_1(s), K_2(s)) = \text{diag}(K_1(s), K_1(s))$. Die geschlossene Strecke ist

$$P_{\text{cl}}(s) = \begin{bmatrix} -F(s)G_1(s) & F(s)G_2(s) \end{bmatrix} \left(I - K(s) \begin{bmatrix} -G_1(s) & G_2(s) \\ G_1(s) & -G_2(s) \end{bmatrix} \right)^{-1} K(s) \begin{bmatrix} -W(s) \\ W(s) \end{bmatrix}. \quad (48.5)$$

Nun ergibt sich durch Einsetzen von $G_1(s) = G_2(s) = \frac{1}{s}$ und $W(s) = F(s) = 1$ sofort $P_{\text{cl}}(s) = 0$. Somit hat d unabhängig von $K(s)$ keinerlei Einfluss auf z .